

分类号:

单位代码: 10019

密 级:

学 号: s030730

中国农业大学

学位论文

三维双相材料裂纹问题的超奇异积分方程方法

Studies of Hyper-singular Integral Equation Method to

Three-Dimensional Crack in Bi-materials

研 究 生: 朱 伯 靖

指 导 教 师: 秦 太 验 教授

申请学位门类级别: 工 学 硕 士

专 业 名 称: 固 体 力 学

研 究 方 向: 断 裂 力 学

所 在 学 院: 理 学 院

2005 年 08 月

**Studies of Hyper-singular Integral Equation Method to
Three-Dimensional Crack in Bi-materials**

**By
BO-JING ZHU**

Submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of

MASTER OF SCIENCE

in

Solid Mechanics

In the

OFFICE OF GRADUATE STUDIES

Of the

CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY

Beijing

9 Aug, 2005

Approved:



Qun Yin Jiao
Professor
Engineering mechanics



Yong Jun Xu
Professor
Fracture mechanics



Zhi Yi Fu
Professor
Engineering mechanics



Zhe Zhou
Professor
Plastic mechanics



Chun Hui Xu Professor Fracture mechanics

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中国农业大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

研究生签名：

时间： 年 月 日

关于论文使用授权的说明

本人完全了解中国农业大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。同意中国农业大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播学位论文的全部或部分内容。

(保密的学位论文在解密后应遵守此协议)

研究生签名：

时间： 2005 年 月 日

导师签名：

时间： 2005 年 月 日

答辩委员会主席： 焦群英 教授 中国农业大学理学院
答辩委员会成员： 徐永君 教授 中国科学院力学研究所
付志一 教授 中国农业大学理学院
周哲 教授 中国农业大学理学院
徐春辉 教授 中国农业大学理学院



摘 要

复合材料的断裂通常是从界面或界面附近开始的,因此,研究复合材料裂纹在界面及界面附近产生的应力场有着重要的理论和实际意义。与均质材料相比,复合材料裂纹具有材料力学特性不同、接触点附近应力场奇异性指数复杂及所应用线弹性断裂理论不同等特点,因而研究较为困难。目前,复合材料裂纹的研究对象大多为二维裂纹,在三维裂纹方面报导较少。本文使用超奇异积分方程法,对三维双相材料裂纹问题进行了比较系统的研究,给出了问题的超奇异积分方程及其高精度数值求解方法,并给出了典型问题的数值结果。主要研究内容包括:

1. 利用已有的三维双相材料位移基本解,给出了在与界面斜交坐标系下位移基本解的一般表达式。在此基础上,使用 *Somigliana* 位移公式给出了三维双相材料中含有与界面斜交裂纹问题的位移和面力一般解,进而利用超奇异积分及边界积分方程法,将此类裂纹问题归结为求解一组以裂纹面位移间断为未知函数的超奇异积分方程,并对未知解在裂纹前沿的性态进行了分析。其中,三维双相材料斜裂纹问题的超奇异积分方程组属于首次报道。

2. 利用超奇异积分方程未知解在裂纹前沿的解析分析结果,以及因子法和有限部积分法,为三维双相材料中与界面垂直的剪切型裂纹问题建立了数值求解方法,给出了超奇异积分的具体计算公式,并给出了裂纹前沿应力强度因子的计算表达式。

3. 利用上述数值计算方法,具体计算了一些典型裂纹问题,获得了裂纹前沿应力强度因子的数值结果,并研究了应力强度因子随各参数的变化规律。结果表明本文建立的数值方法具有良好的精度和收敛性。

关键词: 复合材料, 三维裂纹, 超奇异积分方程, 应力强度因子

Abstract

Cracks of composite material usually begin from or near interface, and therefore it is of theoretical and practical significance to study the stress field caused by the flaws of composite material on the interface. Compared with homogenous materials, however, composite materials have the characteristics such as different mechanical features, complex singularity index of the stress field near interface point, and different linear elastic fracture theories — thus, the study is more difficult. At present, the research mainly focuses on two-dimensional crack, and a few were reported on the three-dimensional composite material cracks. The dissertation systematically studies the problem of three-dimensional bi-material cracks with the method of hyper-singular integral equations, presents the hyper-singular integral equations for the problem and high-accuracy numerical solution, and obtains numerical results of some typical examples. The main contents are as follows.

1. Relied on previous data, the general expression of displacement fundamental solution for three-dimension bi-materials under coordinate system oblique to interface is given. Based on the expression, the general solutions for displacement and surface traction are provided by using Somigliana displacement formula. This type of crack problem is further reduced to solving a set of hyper-singular integral equations with crack interface displacement discontinuities as an unknown function, and the behavior of unknown solutions on crack tips is analyzed. Among them, applying the hyper-singular integral equations to three-dimensional bi-materials inclined cracks is reported for the first time.

2. Based on analytic results of unknown solutions of hyper-singular integral equations on crack tips, the numerical method of shear crack perpendicular to interface in three-dimensional bi-materials is constructed by factor method and finite-part integrals, and the exact hyper-singular integral equations and computation expression of stress intensity factor on crack tips are provided.

3. According to the numerical methods above, some examples of typical cracks are computed, and the numerical results of stress intensity factors on crack tips are obtained. The change rules of stress intensity factors with variables are also investigated. The results show that the numerical method in this paper has high-accuracy and nice convergent performance.

Key words: composite materials, three-dimensional cracks, hyper-singular integral equations, boundary element method, stress intensity factor

目 录

摘 要	I
目 录	III
主要符号表	V
第一章 绪论	1
1.1 研究目的及意义	1
1.2 国内外研究进展	1
1.3 本文主要工作	4
第二章 三维双相材料基本解	5
2.1 基本理论	5
2.2 位移基本解	7
2.3 面力基本解	13
2.4 本章小结	19
第三章 三维双相材料裂纹问题的超奇异积分方程组	20
3.1 与界面垂直裂纹问题的超奇异积分方程组	20
3.2 与界面斜交裂纹问题的超奇异积分方程组	23
3.3 裂纹尖端奇性应力场	27
3.4 裂纹尖端应力强度因子	28
3.5 本章小结	29
第四章 三维双相材料裂纹问题的数值方法	30
4.1 密度函数	30
4.2 超奇异积分处理	30

4.3 应力强度因子	32
4.4 本章小结	32
第五章 三维双相材料裂纹问题的数值结果	33
5.1 收敛性及精度	33
5.2 表面裂纹情况	39
5.3 裂纹形状变化	41
5.4 不同材料情况	42
5.5 一般情况	44
5.6 本章小结	47
第六章 总结与讨论	49
6.1 总结	49
6.2 讨论	50
参考文献	51
致 谢	55
作者简介	56

主要符号表

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= m' + 2m'CC_\theta^2 + mC_\theta + m \\
\varphi_2 &= C_4S_{2\theta} - AS_{2\theta} - A\kappa_1S_\theta \\
\varphi_3 &= A(\kappa_1C_{2\theta} - 6S_\theta^2 + 3\kappa_1C_\theta) \\
\varphi_4 &= 30AC_\theta^2(S_{2\theta}^2 - 2C_\theta^2C_{2\theta} + C_\theta) \\
\varphi_5 &= m'S_{2\theta} + mS_{2\theta} + mS_\theta \\
\varphi_6 &= m'S_{2\theta} + 0.5mS_{2\theta} + mS_\theta \\
\varphi_7 &= 15AS_{2\theta}^2(m'S_\theta^2 + mC_{2\theta}) \\
\varphi_8 &= 3A(\kappa_1C_{2\theta} - 2C_\theta^2)C_\theta - 3AS_{2\theta} \\
\varphi_9 &= 30AS_\theta^2(m'C_\theta C_{2\theta} - 2mS_\theta S_{2\theta}) \\
\varphi_{10} &= 3AC_\theta(\kappa_1C_{2\theta} + \kappa_1C_\theta - 2S_\theta^2) \\
\varphi_{11} &= 3AS_{2\theta}(\kappa_1S_{2\theta} + \kappa_1S_\theta + S_{2\theta}) \\
\varphi_{12} &= -m'C_{2\theta} + m\kappa_1 - m + mC_\theta^2 \\
\varphi_{13} &= m'C_{2\theta} - m\kappa_1 + mC_\theta - mC_\theta^2 \\
\varphi_{14} &= 3A(C_\theta S_{2\theta} - 2\kappa_1C_\theta S_{2\theta} - 2\kappa_1S_\theta) \\
\varphi_{15} &= 30AC_\theta^2(mC_{2\theta}C_\theta + m'S_{2\theta}S_\theta) \\
\varphi_{16} &= 6AC_\theta^2((\kappa_1 + 1)S_{2\theta} + C_\theta^2 - S_{2\theta}) \\
\varphi_{17} &= 3A(\kappa_1C_{2\theta} + \kappa_1C_{3\theta} - 2S_{2\theta}S_\theta) \\
\varphi_{18} &= 15A(S_{2\theta}S_\theta - 0.25S_\theta^4C_{2\theta} - S_{2\theta}^2C_\theta) \\
\varphi_{19} &= 3A((\kappa_1C_{2\theta} - 2C_\theta^2)C_\theta^2 - S_{2\theta}^2(\kappa_1 + 1)) \\
\varphi_{20} &= -3A(0.5\kappa_1S_{2\theta} + \kappa_1S_\theta C_{2\theta} + 2S_\theta^3) \\
\varphi_{21} &= -15AS_{2\theta}(m'S_\theta C_{2\theta} + mC_\theta S_{2\theta} + mS_\theta) \\
\varphi_{22} &= 2C_\theta^3S_\theta + 2C_\theta^2S_\theta C_{2\theta} + S_{2\theta}(1 + C_{3\theta}) \\
\varphi_{23} &= 15A(2C_\theta^2(mS_{2\theta}S_\theta + m'C_{2\theta}C_\theta) - S_{3\theta}S_{2\theta}) \\
\varphi_{24} &= -3A(\kappa_1S_{2\theta} + \kappa_1C_\theta S_{2\theta} + 2C_\theta^2S_\theta + 2C_\theta^2) \\
\varphi_{25} &= -3A(\kappa_1C_{2\theta} + \kappa_1C_\theta C_{2\theta} - S_{2\theta}S_\theta - S_{2\theta}) \\
\varphi_{26} &= 30AS_\theta(2C_\theta^2(C_{3\theta} + C_\theta) - S_{2\theta}S_\theta) \\
\varphi_{27} &= 3A\kappa_1S_\theta^2 - A\kappa_1C_\theta^2 - C_4C_{2\theta} + 2AC_\theta^2 \\
\varphi_{28} &= 30AC_\theta(C_\theta^2C_{2\theta} + C_\theta^2S_{2\theta} - 0.5S_{2\theta} - 0.25S_{4\theta}) \\
\varphi_{29} &= -3AS_\theta(\kappa_1C_{2\theta} + \kappa_1C_\theta - 2S_\theta^2) - \kappa_1S_{2\theta} \\
\varphi_{30} &= 30AC_\theta^2(S_\theta(C_{3\theta} + C_\theta) + 2C_\theta^2 - S_{3\theta}S_\theta) \\
\varphi_{31} &= 15A(S_{2\theta}(2C_{3\theta}C_\theta + S_\theta S_{3\theta}) + 2C_\theta^3S_{3\theta}) \\
\varphi_{32} &= 15A(S_{4\theta}C_\theta^2 + 0.5C_\theta S_{4\theta} + 0.5S_{2\theta}^3) \\
\varphi_{33} &= 3Am'(C_\theta^2(\kappa_1C_{2\theta} + 2S_\theta^2) + S_{2\theta}(S_{2\theta} + S_\theta)) \\
\varphi_{34} &= -30AC_\theta^2(m'S_\theta^2C_{2\theta} + 0.5m'S_{4\theta} - 0.5mS_{2\theta}^2 - m) \\
\varphi_{35} &= 3AS_{2\theta}(m'(\kappa_1 - 1) + 0.5\kappa_1m(C_{2\theta} + 2C_\theta^2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{36} &= A\kappa_1(mC_\theta + S_\theta(2m'C_\theta + m + mC_\theta)) \\
\varphi_{37} &= 15A(S_{2\theta}(mC_{2\theta}C_\theta + m'S_{2\theta}S_\theta) - 2S_{3\theta}C_\theta^2) \\
\varphi_{38} &= S_\theta(-S_\theta - 3A\kappa_1(m + m'C_{2\theta}) - 6A(mC_\theta^3 - m'S_\theta^2)) \\
\varphi_{39} &= 3A(\kappa_1(m'S_\theta S_{2\theta} - mC_\theta C_{2\theta}) + 2C_\theta(mC_\theta^2 + m'S_\theta^2)) \\
\varphi_{40} &= 3A(\kappa_1 S_{2\theta}(C_{2\theta} + m'C_\theta) - 2S_\theta(mC_\theta^2 + m'S_\theta - C_\theta^2)) \\
\varphi_{41} &= A\kappa_1 m'C_{2\theta} + mA\kappa_1 C_\theta + 2A\kappa_1 mC_\theta^2 + C_2 m \\
\varphi_{42} &= A\kappa_1 m'S_{2\theta} + mA\kappa_1 S_\theta - A\kappa_1 mS_{2\theta} + AmS_{2\theta} - C_2 mS_{2\theta} \\
\varphi_{43} &= -A\kappa_1 m'C_{2\theta} - mA\kappa_1 C_\theta + 2A\kappa_1 mC_\theta^2 - 2AmC_\theta^2 - C_2 mC_{2\theta} \\
\varphi_{44} &= -3AS_\theta(2C_\theta(m'S_{2\theta} + AS_\theta) + m'\kappa_1 S_\theta + C_\theta S_{2\theta}(m' + m\kappa_1 S_\theta - m)) \\
\varphi_{45} &= 1.5A(m'\kappa_1 S_{2\theta}^2 + 2m'\kappa_1 S_\theta^2 C_{2\theta} - 2S_\theta(m'S_\theta^2 - 0.5m\kappa_1 C_{2\theta} + mC_\theta^2)) \\
\varphi_{46} &= 3Am'\kappa_1 S_\theta^2 C_{2\theta} + 3AC_\theta(-m'S_\theta S_{2\theta} - m\kappa_1 S_\theta^2 S_{2\theta} + mS_\theta^2 C_{2\theta}) \\
\varphi_{47} &= 3A(2C_\theta(m'S_{2\theta}S_\theta - m\kappa_1 C_\theta C_{2\theta} + 2mC_\theta^3) - 0.5m'\kappa_1 S_{4\theta}) \\
\varphi_{48} &= 30A(C_\theta^2(-S_{3\theta} + mS_\theta C_{2\theta}) + S_{2\theta}(m'S_\theta S_{2\theta} + mC_\theta C_{2\theta})) \\
\varphi_{49} &= -3Am'S_{2\theta}(\kappa_1 m'C_{2\theta} + S_\theta^2) + C_\theta(S_\theta - S_{2\theta}) - 3A\kappa_1 mS_\theta^2(S_{2\theta} + S_\theta) \\
\varphi_{50} &= -30A(C_\theta^2(m'C_\theta^2 C_{2\theta} - 0.5mS_{4\theta}) - 0.5S_{2\theta}(m'C_\theta^2 S_{2\theta} + 0.5mS_{4\theta})) \\
\varphi_{51} &= -30AC_\theta^2(m'S_\theta^2 + 0.5mS_{4\theta} - m'S_\theta^2 C_{2\theta} - m'S_{2\theta}^2 - mC_{2\theta}) \\
\varphi_{52} &= -15AS_{2\theta}(2m'S_\theta^2 C_{2\theta} + m'S_{2\theta}^2 + mC_{2\theta} + mC_\theta^2 + m'S_{4\theta}) \\
\varphi_{53} &= 3A(\kappa_1(mC_\theta + m'S_\theta S_{2\theta} - mC_\theta C_{2\theta}) + 2C_\theta(mC_\theta^2 - m'S_\theta^2)) \\
\varphi_{54} &= 3A(2C_\theta^2(\kappa_1 C_{2\theta} - 2C_\theta^2) - S_{2\theta}^2(\kappa_1 + 1) + (S_{2\theta} - 2C_{2\theta})C_\theta^2 - S_{2\theta}(C_\theta^2 - 2S_{2\theta})) \\
\varphi_{55} &= 30A(S_\theta^2(S_{3\theta} - mS_\theta C_{2\theta}) - S_{2\theta}(m'S_\theta C_{2\theta} + mC_\theta S_{2\theta} + mS_\theta)) \\
\varphi_{56} &= 30A(C_\theta^2(m'S_\theta C_{2\theta} + mC_\theta S_{2\theta} + mS_\theta) - 0.5S_{2\theta}(m'S_\theta S_{2\theta} - mC_\theta C_{2\theta})) \\
\varphi_{57} &= -30A(S_\theta^2(m'S_\theta C_{2\theta} + mC_\theta S_{2\theta} + mS_\theta) + 0.5S_{2\theta}(m'C_\theta C_{2\theta} - 2mS_\theta S_{2\theta})) \\
\varphi_{58} &= C_4 m'S_{2\theta} - Am'S_{2\theta} - 0.5A\kappa_1 mS_{2\theta} - A\kappa_1 S_\theta(2m'C_\theta + m + mC_\theta) \\
\varphi_{59} &= C_4 m'C_{2\theta} + 2Am'S_\theta^2 + A\kappa_1 mS_\theta^2 + A\kappa_1 C_\theta(2m'C_\theta + m + mC_\theta) \\
\varphi_{60} &= 15A(S_{2\theta}(m'S_\theta^2 C_{2\theta} + 0.5m'S_{4\theta} - 0.5mS_{2\theta}^2 - m) - 2C_\theta^2(m'S_\theta^2 S_{2\theta} + 0.5mS_{4\theta})) \\
\varphi_{61} &= 3A(S_\theta(\kappa_1 C_{2\theta} + \kappa_1 C_\theta - 2S_\theta^2) + C_\theta(\kappa_1 S_{2\theta} + \kappa_1 S_\theta + S_{2\theta})) \\
\varphi_{62} &= 6A(C_\theta^2(-3S_\theta^2 - C_\theta^2 - C_{2\theta}) - 3S_\theta(2\kappa_1 C_\theta S_{2\theta} - 2S_\theta(\kappa_1 C_{2\theta} + 2C_\theta) + \kappa_1 S_\theta)) \\
\varphi_{63} &= 6A(C_\theta^2(mS_\theta - m'S_{2\theta}) + m'C_\theta^2 S_{2\theta} - m'S_{2\theta}(\kappa_1 - 1) + 0.25\kappa_1 mS_{2\theta}(C_{2\theta} + 2C_\theta^2)) \\
\varphi_{64} &= 3A(2C_\theta^2(mS_\theta - m'S_{2\theta}) + m'S_{2\theta}(\kappa_1 - 1) - \kappa_1 mC_\theta(C_{2\theta} - 1 + 2C_\theta^2)) \\
\varphi_{65} &= 3A(2C_\theta^2(m' + 2mC_\theta^2 + mC_\theta + mC_{2\theta}) - 0.5m'S_{2\theta}(\kappa_1 S_\theta^2 + 0.5S_{2\theta})) + mC_\theta^2(4C_\theta^2 - \kappa_1 - 2\kappa_1 C_{2\theta}) \\
\varphi_{66} &= 3A(2C_\theta^2(m'S_{2\theta} + AS_\theta) - S_{2\theta}(m' + 2mC_\theta^2 + mC_\theta + mC_{2\theta}) - 0.5m'\kappa_1 S_{2\theta}^2 + 2m'\kappa_1 S_\theta^4) \\
\varphi_{67} &= 3(m'\kappa_1 S_{2\theta}(C_\theta^2 S_\theta + S_\theta^2) + C_\theta^2(2mC_\theta^2 - \kappa_1 m - \kappa_1 mC_{2\theta} - 2m'S_\theta^2 - C_\theta m\kappa_1)) \\
\varphi_{68} &= -30A(C_\theta^2(S_{3\theta} - mS_\theta C_{2\theta}) - 0.5S_{2\theta}(m'S_\theta S_{2\theta} + mC_\theta C_{2\theta}) - C_\theta^2(m'S_\theta C_{2\theta} + mC_\theta S_{2\theta} + mS_\theta)) \\
\varphi_{69} &= 30A(S_{2\theta}(S_{3\theta} - mS_\theta C_{2\theta}) + C_\theta^2(m'C_\theta C_{2\theta} - 2mS_\theta S_{2\theta}) + S_\theta^2(m'S_\theta S_{2\theta} + mC_\theta C_{2\theta})) \\
\varphi_{70} &= -3A(S_{2\theta}(mS_\theta - m'S_{2\theta}) + S_{2\theta}(m + mC_\theta - 2m'C_\theta^2) + m'S_{2\theta}^2 + 2m'S_\theta^2(\kappa_1 C_{2\theta} + 2S_\theta^2)) \\
\varphi_{71} &= 3Am'S_{2\theta}(\kappa_1 C_{2\theta} + 2S_\theta^2) + 3AC_\theta^2 m'S_{2\theta}(\kappa_1 - 1) + C_\theta(S_{3\theta} - S_{2\theta}S_\theta - 0.5S_{2\theta}) + 3A\kappa_1 mS_\theta^2(S_{2\theta} + S_\theta) \\
\varphi_{72} &= 0.5S_{2\theta} - 1.5Am'S_{4\theta} + 3Am'S_\theta^2(\kappa_1 C_{2\theta} + 2S_\theta^2) - 3A\kappa_1 mS_\theta(S_\theta - C_\theta S_{2\theta} - 0.5S_{2\theta}) \\
\varphi_{73} &= 3A(S_\theta^2 m'(\kappa_1 C_{2\theta} + 2S_\theta^2) + S_{2\theta}^2 m'(\kappa_1 - 1) + \kappa_1 mS_\theta(S_{3\theta} - S_{2\theta}S_\theta - 0.5S_{2\theta})) + mC_\theta^2(C_{2\theta} + 2C_\theta^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{74} &= 15A(S_{2\theta}(m'S_{\theta}^2C_{2\theta} + m'S_{\theta}^2 + 0.5mS_{4\theta}) - 2C_{\theta}^2(m'C_{\theta}^2S_{2\theta} + 0.5mS_{4\theta}) + m'S_{2\theta}^2C_{2\theta}) \\ \varphi_{75} &= 15A(S_{2\theta}(S_{3\theta} - mS_{\theta}C_{2\theta}) + 2C_{\theta}^2(m'C_{\theta}C_{2\theta} - 2mS_{\theta}S_{2\theta}) - 2S_{\theta}^2(m'S_{\theta}S_{2\theta} - mC_{\theta}C_{2\theta})) \\ C_9 &= B(\kappa_1 + 1); C_{10} = A\kappa_1(\kappa_1 - 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 &= -2C_8 + 2C_7C_{2\theta} \\ \phi_2 &= 24(A - C_4)S_{\theta}^2 \\ \phi_3 &= C_{10} - 2A\kappa_1 + 2C_9 \\ \phi_4 &= 6S_{\theta}^2(-5C_4 + 4A) \\ \phi_5 &= 3(C_{10} - 0.5C_3)S_{\theta} \\ \phi_6 &= 2C_4C_8 - 2C_5 + 4C_4 \\ \phi_7 &= C_5 + AC_8 + 4A - 2C_9 \\ \phi_8 &= 60(A - C_4S_{\theta}^2 + AS_{\theta}^2) \\ \phi_9 &= (2C_4 - C_3 - 2C_9)C_{\theta} \\ \phi_{10} &= (12A\kappa_1 + 1.55C_3)S_{\theta} \\ \phi_{11} &= (2C_4 + 4C_8 - C_3)S_{\theta}^2 \\ \phi_{12} &= (2C_4 - C_3 + 4C_9)C_{2\theta} \\ \phi_{13} &= 6(-C_1 + 2A + 2C_9)C_{\theta}^2 \\ \phi_{14} &= C_4C_8 + 2C_9 + 9C_4 - 4A \\ \phi_{15} &= 6(C_8C_{\theta}^2 - C_7C_{2\theta} + 6C_{\theta}^2) \\ \phi_{16} &= 6(C_4 + C_5 + 2A - 2C_9) \\ \phi_{17} &= 6S_{\theta}^2(C_{10} + 2A\kappa_1 - 2C_9) \\ \phi_{18} &= 3(C_5 - 4A\kappa_1 - 2C_9)S_{2\theta} \\ \phi_{19} &= 2AC_8 - 2AC_8C_{\theta}^2 + 2C_4S_{\theta}^2 \\ \phi_{20} &= 6C_{\theta}(C_4 + C_5 + 2A - 2C_9) \\ \phi_{21} &= 3(C_5 + 2A - 4C_9 + 0.5C_3)C_{\theta} \\ \phi_{22} &= 3(C_5 + 2A - 4C_9 + 0.5C_3)S_{2\theta} \\ \phi_{23} &= 3(C_5 + 2A - 4C_9 + 0.5C_3)C_{2\theta} \\ \phi_{24} &= 3(C_5 + 2A - 4C_9 + 0.5C_3)S_{2\theta} \\ \phi_{25} &= 3(C_5 + 2A - 4C_9 + 0.5C_3)C_{\theta} \\ \phi_{26} &= 3(C_5 + 2A - 4C_9 + 0.5C_3)C_{2\theta} \\ \phi_{27} &= 3(C_5 + 2A - 4C_9 + 0.5C_3)C_{2\theta} \\ \phi_{28} &= 3(-C_6 + 4A - 4C_9 + 0.5C_3)C_{\theta} \\ \phi_{29} &= 3(-C_6 + 4A + 0.5C_3)S_{2\theta} \\ \phi_{30} &= 3S_{2\theta}(2C_5 - 6C_4 - 2C_9 - 0.5C_3) \\ \phi_{31} &= 2AC_8 - 4C_4C_8S_{\theta}^2 - 2C_5C_{28} + 4C_9 - 4C_4 - 8C_4S_{\theta}^2 \\ \phi_{32} &= 3(2C_5C_{2\theta} + 2AC_8 + 12C_4S_{\theta}^2 - 4C_9C_{\theta}^2 + C_3S_{\theta}^2)S_{2\theta} \\ \phi_{33} &= 6(C_8C_4S_{\theta}^2 - AS_{\theta}^2 - AC_8 + C_3C_{28} + 2A\kappa_1 + 10A\kappa_1S_{\theta}^2 - 8A - 16AS_{\theta}^2 - 2C_9C_8^2)\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\mu_1(\kappa_1 + 1) - \mu_2(\kappa_1 + 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)}; \beta = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)}$$

$$\omega_1 = B\beta(\kappa_1 + 1)$$

$$\omega_2 = 840AS_\theta^2S_{2\theta}^2$$

$$\omega_3 = S_\theta^2(1 - \kappa_1 - 4C_{2\theta})$$

$$\omega_4 = A\beta(\kappa_1 + 1)(\kappa_1 - 1)$$

$$\omega_5 = 2S_\theta^2(\kappa_1 C_\theta^2 - 6 + 7S_\theta^2)$$

$$\omega_6 = -4S_\theta^2(\kappa_1 S_\theta^2 + 2 - 6S_\theta^2)$$

$$\omega_7 = A\beta(\kappa_1 + 1)(\kappa_1 - 1 - 2B)$$

$$\omega_8 = A\beta(\kappa_1 + 1)(\kappa_1 - 1 - 4B)$$

$$\omega_9 = 4S_\theta^2(\kappa_1^2 S_{2\theta}^2 - 2S_{2\theta}^2 + 2C_{4\theta})$$

$$\omega_{10} = S_{2\theta}^2 \kappa_1 + C_\theta^2 - 2S_{2\theta}^2 + 2C_{4\theta}$$

$$\omega_{11} = 4S_\theta^3(\kappa_1 C_{2\theta} - 2 - 6C_{2\theta})$$

$$\omega_{12} = \omega_8 + 2S_\theta^2 A \kappa_1^2 - 2A \kappa_1 + 2C_\theta^2$$

$$\omega_{13} = 3S_\theta(-2A \kappa_1^2 + 2A + \omega_4 C_\theta^2)$$

$$\omega_{14} = 0.5\omega_{28}(C_\theta^2 S_{2\theta}^2 - C_{2\theta}^2) + 4\omega_1 C_\theta^4$$

$$\omega_{15} = \kappa_1 S_\theta - S_\theta + 7C_{2\theta} S_\theta - \kappa_1 C_{2\theta} S_\theta$$

$$\omega_{16} = 6S_\theta(2A \kappa_1^2 - 2A - 8AS_\theta^2 - \omega_4 S_\theta^2 - 4\omega_1 C_\theta^2)$$

$$\omega_{17} = 3A(6S_{2\theta}^2 - \kappa_1^2 C_{2\theta} + \kappa_1 C_{4\theta} - 2 - 2S_\theta^2)$$

$$\omega_{18} = -2C_{4\theta} A \kappa_1 + 2C_{4\theta} + (0.5\omega_{28} - \omega_{28})(3C_{2\theta}^2 - 1)$$

$$\omega_{19} = 12(C_\theta^2 A \kappa_1^2 + C_\theta^2 A \kappa_1 - 0.5C_\theta^2 \omega_{28} + 2A - 8AC_\theta^2)$$

$$\omega_{20} = 3((A \kappa_1^2 - A \kappa_1)(1 - 0.25S_{2\theta}^2 + 0.5C_\theta^2) - 4C_\theta^2 \omega_{24})$$

$$\omega_{21} = 3(A \kappa_1^2 - A \kappa_1 - 2S_\theta^2 A \kappa_1 + 2AC_\theta^2 + 0.5C_{2\theta} \omega_4 - 4\omega_1 C_\theta^2)$$

$$\omega_{22} = 6S_\theta(2A \kappa_1 + 4A \kappa_1 S_\theta^2 - 12AS_\theta^2 - 2A - S_\theta^2 \omega_4 - 4\omega_1 C_\theta^2)$$

$$\omega_{23} = -16S_\theta^3 A \kappa_1 + 16S_\theta^3 + 2\omega_4 S_\theta(3S_\theta^2 - 1) + 4\omega_1 S_\theta(2 - 3S_\theta^2)$$

$$\omega_{24} = 3S_\theta(-2A \kappa_1^2 + 4A \kappa_1 S_\theta^2 + 2A - 8AS_\theta^2 + C_{2\theta} \omega_4 - 4\omega_1 C_\theta^2)$$

$$\omega_{25} = 12S_\theta^3(24A \kappa_1 S_\theta^2 - 8A \kappa_1 + 28AC_{2\theta} - 8A + C_{2\theta} \omega_4 - 4\omega_1 C_{2\theta})$$

$$\omega_{26} = 6S_\theta^2(A \kappa_1^2 - A \kappa_1 - 4C_\theta^2 A \kappa_1 + 12AC_\theta^2 - 2A + 0.5C_{2\theta} \omega_7 - 4\omega_1 C_\theta^2)$$

$$\omega_{27} = 6S_\theta^2(2A \kappa_1^2 + 2A \kappa_1 - 12S_\theta^2 A \kappa_1 - 12A + 28AS_{2\theta}^2 - 2S_{2\theta}^2 \omega_1 - \omega_4 C_{2\theta}^2)$$

$$\omega_{28} = 6S_\theta^2(4A \kappa_1 + 16A \kappa_1 S_\theta^2 C_{2\theta} - 4A(5 + 4C_{2\theta} - 7C_{2\theta}^2) - \omega_4 S_{2\theta}^2 - 8\omega_1 C_\theta^4)$$

$$\omega_{29} = 3(2A \kappa_1^2 - 8A \kappa_1 S_\theta^2(1 + C_\theta^2) - 2A(4S_\theta^2 - 1) - 4\omega_4 C_\theta^4 + 4\omega_1 S_{2\theta}^2(3C_\theta^2 - 1))$$

$$\omega_{30} = -2A \kappa_1^2 + 6A \kappa_1 - 2(A \kappa_1 - 1)(3C_{2\theta} + 2S_\theta S_{3\theta}) - 8A + 2\omega_4 S_\theta^2(2C_\theta^2 - 1) + 4\omega_1 C_\theta^2(1 - 3S_\theta^2)$$

第一章 绪论

1.1 研究目的及意义

材料的力学性质是衡量材料使用性能的重要特征。为了数学处理上的简化,在早期研究材料力学性质时,通常将材料假定为一连续体。上世纪六十年代以来,大量工程结构事故表明,传统处理方法已经不能满足和适应材料科学和工程技术发展的要求,必须考虑实际材料中存在的大量缺陷(裂纹,夹杂等)。这些缺陷在材料上会引起应力集中或应力奇异,从而导致缺陷本身不断扩展,最终造成结构的破坏。随着材料设计、制造、加工及使用精度要求的提高,这种破坏造成的影响日趋严重。作为一种新的考虑材料裂纹缺陷的力学处理方法,断裂力学正是在这种背景下迅速发展起来的一门理论与工程技术学科。

随着复合材料日益广泛地应用于航空、航天、汽车、造船、化工及土建等诸多领域,断裂力学问题的研究也从单一均质各向同性材料转向非均质、各向异性或多相复合材料。复合材料存在许多界面,其损伤及破坏通常是从界面或界面附近开始的,准确分析理解界面及界面附近应力场在工程实用中显得非常重要。

与均质材料相比,复合材料具有材料力学特性不同、接触点附近奇异性指数分析复杂^[1-3]、裂纹类型多为复合型、线弹性断裂力学理论应用到复合材料与均质材料不完全相同等困难,使复合材料(较均质材料)裂纹研究难度较大,特别是三维复合材料问题的研究更为困难。

在实际研究中,人们将复合材料简化为各种不同类型的力学模型,以使问题简化。双相复合材料是最简单的一种模型,同时该模型又能反映多相复合材料的普遍物理现象。本文以此模型为基础进行三维双相材料断裂力学问题的研究工作,这不仅具有重要的理论意义,而且也具有重要的实际应用价值。

三维双相材料断裂力学问题的研究,早期大都限于解析工作,但由于问题的复杂性,要想求得各种各样问题的解析解是不可能的。因此,工程中经常采用数值法进行求解。随着计算机技术的发展,三维断裂问题的数值方法有了许多新进展。在众多的数值方法中,边界元是一种比较成功的方法。由于它在数值计算过程中尽可能地采用了解析运算,最后主要涉及边界上的信息,因而它的数值计算要比一般的数值方法具有更高的精度,所以在实际中计算应用广泛。但由于边界元法在求解过程中,需要无限区域基本解,这一特点,使边界元法求解复合材料问题存在很大困难。虽然目前关于双相复合材料空间问题基本解已经有了部分结果,但这些结果直接应用到边界元法中还存在困难。如果能够得到准确、完整的基本解,这对于用边界元法求解复合材料问题具有重要意义。

本文的目的是应用超奇异积分与边界元相结合的方法,对三维双相材料与界面垂直裂纹问题及与界面斜交裂纹问题进行理论分析,进而对与界面垂直剪切型裂纹问题建立数值方法,研究应力强度因子随各参数的变化规律。

1.2 国内外研究进展

1.2.1 边界元方法

边界元法是继有限元法之后的一种别具特色的新的数值方法,边界元的基础是用 *Fredholm* 积分方程的位势积分来表示问题的解,它是将支配物理现象的微分方程转化为边界上的积分方程,然后再进行离散求解的数值方法。边界元法包括直接法和间接法:直接法是指得到的积分方程是区域内的物理量与边界上的物理量之间的关系式,积分方程中的未知函数将是所拟求的物理量在边界上的值;间接法所求物理量是根据线性叠加原理,用在边界上分布的虚拟的“源”的某种积分来表示,而这时的边界积分方程中的未知函数正是边界上虚拟“源”的分布密度,它本身不一定有什么物理意义,但它可以用来表示某种物理量。

对于具体力学问题,边界元法是将描述弹性力学问题的偏微分方程边值问题化为边界积分方程并吸收有限元法的离散化技术而发展起来的。将弹性力学问题归结为求解一边界积分方程组,若在边界上已知 3 个位移和三个面力分量,则由边界积分方程可以得到其余的未知分量,而任意内点的位移和应力可由 6 个边界分量通过边界积分来确定。边界元法中包含有有限元的思想,它把有限元的按求解域划分单元离散的概念移植到边界积分方程方法中,但边界元法不是有限元法的改进或发展,边界元法与有限元法存在着质的差异。边界元法的数学基础是积分方程(有限元法是变分法),与有限元法相比:边界元法具有节省数据准备工作量和计算量,计算精度高等优点。

从边界元法发展过程看,在国外, *Fredholm* (1903)得出势问题的积分公式; *Kellogg* (1953)首次应用积分方程解 *Laplace* 问题;苏联学者 *Muskhelishvili* (1953)、*Kupradze*(1966)、*Mikhlin*、*Smirnov* 等研究了标量型、矢量型积分方程及积分域内奇点和间断的情况; *Ritz*(1909)提出有限元法; *Trefftz* (1926)提出边界元法初步概念; *Jaswon*、*Symm*、*Massonet*、*Hess*(1960-1970)等学者进行了流体力学和一般势问题中“源”方法的研究,这是一种间接边界元法;其中 *Jaswon*(1963)^[6]、*Symm* (1963)^[7]应用间接边界元法计算了位势问题。*Kupradze*(1965)建立了边界元积分方程的直接方法; *Rizzo*(1967)^[8]应用直接边界元法计算了二维线弹性问题; *Cruse*(1969)^[9]在边界元法应用到三维弹性问题中; *Cruse*、*Buren*(1971)^[67]最早将边界积分方程法应用于断裂力学,采用分割区域法将裂纹问题化为一般的边值问题进行处理,从而避免了边界元法解决断裂问题时遇到的不确定性; *Banerjee*、*Butterfield*、*Brebbia*、*Dominguez*(1977)提出了边界元法离散化理论; *Brebbia*(1978)首次正式用边界元提法; *Ghosh et al*(1986)^[10]把二维弹性问题基本解超奇异积分转化为弱奇异积分; *Lei* (1994)^[11-12]对二维弹性 *Reissner* 板建立新类型边界积分方程。在我国,在提高边界元法计算精度的研究中,也涌现出许多新方法:带权 *Gauss* 积分公式、刚体位移间接法、*Green* 函数法、位错法、对偶边界积分法、位错密度法、位移二次插值法等。

1.2.2 超奇异积分方法

在超奇异积分方面,在国外, *Hadamard*(1910-1923)^[14,15]把比主值型奇异积分方程奇异性还要多的积分方程称 *Hadamard* 奇异积分方程(即超奇异积分方程); *Ioakimidis* (1982)^[16,17]首次把 *Hadamard* 的超奇异积分应用到线弹性断裂力学中,推导出受法向载荷作用的任意形状平片裂纹问题的超奇异积分方程,并使用 *Kutt* 有限部分积分法进行数值化; *Sohn* 与 *Hong*(1985)^[18]利用位移间断分片线性表示为无限体 *I* 型裂纹的超奇异积分方程,并建立了数值法。在我国, *Tang* 与

Qin (1990)^[19,20,65]等系统的分析和研究了超奇异积分在三维均质材料断裂问题中的应用,并提出一套完整的求解理论;*Qin*^[21-22, 61-64]把这一理论不断完善;*Qin(2002)*^[4,5]把这一理应用到三维双相材料断裂问题中。其它学者也有不同程度的突破^[12,23-25]。

超奇异积分方程与边界元方法结合是研究断裂力学问题的一种非常有效的方法,结合因子法可以得到精度较高的数值结果。因此将裂纹问题归结为求解一超奇异积分方程组,进行奇异性处理,转化为线性方程组,利用因子法数值求解已成为解决线弹性断裂力学问题一种重要途径。

1.2.3 复合材料裂纹

复合材料界面裂纹方面:*Williams(1959)*^[26]最早用级数展开法研究了复合材料界面裂纹问题,得到了各向同性线弹性材料界面裂纹尖端应力场的奇异性结果;*Sih 与 Rice (1964)*^[27]采用 *Williams* 特征展开法研究了复合材料界面裂纹的板弯曲问题,也得到了界面裂纹尖端应力具有震荡奇异性的结论;*England(1965)*^[28]应用复变函数法研究了复合材料界面裂纹问题,得到裂纹尖端应力场及位移场具有振荡奇异性;*Rice 与 Sih (1965)*^[29]采用复变函数与特征展开结合的方法,研究了半无限长界面裂纹及有限长界面裂纹表面应力问题,提出了复应力强度因子的断裂准则;*Erdogan(1972)*^[30]采用 *Fourier* 变换法研究了界面裂纹问题,得到了一组第二类 *Cauchy* 型奇异积分方程;*Erdogan 与 Gupta(1972)*^[31]应用 *Fourier* 积分变换研究了双相复合材料界面刚性夹杂及弹性夹杂问题,同样归结为求解奇异积分方程组问题;*Atkinson (1977)*^[32]提出两种界面模型,模型一认为界面具有一定厚度并异于双相复合材料的界面层,模型二认为界面具有连续变化弹性模量的界面层,消除了裂纹尖端应力指数振荡性;*Rice(1988)*^[33]研究了界面裂纹尖端应力场,应力强度因子;*Wang(1991)*^[34]对界面断裂力学发展背景、进展及未来研究重点做了总结。

复合材料与界面垂直裂纹方面:*Zak(1963)*^[35]与 *Williams* 采用特征函数展开法,研究复合材料中半无限长垂直裂纹问题,得到裂纹与界面接触点附近性态指数的特征方程;*Bogy(1971)*^[36]采用 *Mellin* 变换法研究垂直裂纹问题,得出裂纹接触界面后,应力的性态指数与材料常数及裂纹几何形状有关;*Cook 与 Erdogan (1972)*^[37]利用 *Mellin* 变换方法,将垂直裂纹问题归结为求解 *Cauchy* 型奇异积分方程组,得到半无限长裂纹受集中力作用时,接触点奇性应力场,并对其分布函数进行了数值求解;*Erdogan 和 Cook (1974)*^[38]利用 *Mellin* 变换方法研究复合材料中垂直裂纹的反平面剪切问题,做了详细的数值分析工作;*Atkinson(1977)*^[32]应用他所提出的界面模型中的第二中模型,研究了垂直裂纹接触界面时应力性态指数,采用 *Mellin* 变换法得到了裂纹尖端应力平方根奇异性结论;*Vuayakumar et al(1983)*^[39]根据 *Erdogan* 复合材料中垂直裂纹的积分方程,引入一围线积分,研究裂纹接触材料界面时,裂纹尖端的奇性应力场;*Ting et al(1984)*^[40]对双相复合材料中垂直裂纹的性态指数进行了分析;*Erdogan(1991)*^[41]研究了双相复合材料垂直裂纹问题,设其中一相材料剪切模量为定值,而另一相材料的剪切模量为与距离界面直线距离相关的函数。得出垂直裂纹接触界面后,裂纹接触点附近应力的性态指数为平方根奇性与材料常数无关;*Wen(1991)*^[42]应用位移间断方法研究了双相复合材料垂直裂纹问题;*Gupta(1992)*^[43]研究了双相复合材料中垂直裂纹的扩展问题;*Chen(1994)*^[44]采用 *Williams* 特征展开法研究垂直裂纹,给出了裂纹尖端位移场及奇性应力场表达式,反对称及对称的奇性应力场,数值求解了裂纹尖端的应力强度因子;*Qin(2002)*^[4]对三维双相材料垂直于界面 *I* 型裂纹问题进行了系统全面研究,并给出计

算出应力强度因子^[5]的数值方法。

复合材料斜裂纹方面：复合材料斜裂纹由于裂纹本身无几何对称性，通常是复合型问题。*Fenner (1976)*^[45]应用 *Williams* 特征函数展开法，研究了复合材料中半无限长斜裂纹的性态指数；*Comninou et al (1979)*^[46]采用斜裂纹尖端闭合假设，消除了斜裂纹的复性态指数的影响；*Wang (1994)*^[47] 采用 *Williams* 特征函数展开及 *Muskhelishvili* 复变函数相结合的方法，得到斜裂纹接触界面时性态指数的特征方程，并应用 *Newton-Raphson* 迭代法进行数值求解，得到了文献^[45]的有关结论；*Li et al(1997)*^[3]应用 *Williams* 特征函数展开的方法，对斜裂纹接触界面时性态指数过渡角进行了分析；*Chen(1998)*^[48]对双相复合材料楔形体中应力奇性进行了分析；*Ashbaug(1975)*^[49]应用 *Mellin* 变换的方法将双相复合材料有限长斜裂纹问题归结为求解一组 *Fredholm* 积分方程；*Ma et al(1990)*^[50]应用 *Mellin* 变换法，研究了双相复合材料中含接触界面的半无限长斜裂纹的反平面剪切问题；*Tewary et al (1996)*^[51] 解析得到了双相复合材料中含斜半无限长裂纹的，满足双相复合材料界面上应力和位移连续条件及裂纹表面无应力边界条件的 *Green* 函数，同时得到了斜裂纹与界面接触点的应力场奇性与裂纹斜角相关的结论；*Wang et al(1996)*^[52]应用积分变换法研究了双相复合材料斜裂纹反平面剪切问题，数值求解了斜裂纹未接触界面时裂纹尖端应力强度因子；*Wang(2005)*^[53]应用分部积分法和边界元法，研究了二维双相复合材料的斜裂纹问题，数值求解了裂纹尖端应力强度因子；*García-Sánchez et al(2005)*^[54]应用边界元研究了二维双相复合压电材料斜裂纹问题，数值求解了裂纹尖端应力强度因子。

1.3 本文主要工作

根据以上综述，本文做了如下几方面研究工作：

1. 三维双相材料弹性力学空间基本解：对已有复合材料空间位移基本解进行整理，应用调和函数的镜像法、直角坐标系下的张量变换规则、弹性理论及边界条件，推导三维双相材料与界面垂直及与界面斜交坐标系下的空间位移、面力基本解。这部分内容在第二章中给出。
2. 三维双相材料与界面垂直裂纹问题及与界面斜交裂纹问题的超奇异积分方程组：对得到的基本解使用 *Somigliana* 公式，推导三维双相材料与界面垂直裂纹问题及与界面斜交裂纹问题应力场积分核函数 S_{kij} 表达式。再根据超奇异积分原理，把这两种裂纹问题各自归结为求解一超奇异积分方程组问题。这部分内容在第三章中给出。
3. 三维双相材料与界面垂直剪切型裂纹问题数值方法建立：对裂纹尖端奇异性指数、奇异性应力场进行理论分析，推导由裂纹面位移间断函数表示的应力强度因子计算公式；再以密度函数基本解表示位移间断函数，应用有限部积分原理和边界元法，把超奇异积分方程组解耦，转变为代数方程组，得出计算裂纹前沿应力强度因子的具体公式。这部分内容在第四章中给出。
4. 数值计算：编写 *Fortran* 计算程序，研究应力强度因子随 *Durder* 参数、多项式指数、配置点数、坐标值等参数的变化规律。这部分内容在第五章中给出。

第二章 三维双相材料基本解

无限体受集中力作用，在弹性体内一点产生的位移及应力解，称为弹性力学基本解。这个基本解可以通过位移法给出的平衡(*lamé' – navier*)方程、*helmholtz* 弹性势理论、*poisson* 方程、*Newtonian* 势、*papkovich* 张量应变方程得到。均质材料基本解由 *Kelvin* 最早求得。对于双相材料，如果假设两种材料的连接方式是理想的，应用调和函数的镜像法，把两种材料各自满足 *lamé' – navier* 平衡方程的 *Papkovich – Neuber* 通解及 *Kelvin* 特解，代入广义 *Hooke* 定律及界面处的位移边界条件中，就可以推导出在空间内部作用有集中力的空间弹性力学位移基本解。再根据广义 *Hooke* 定律，可获得应力基本解。把边界条件带入机可得到面力基本解。

本章利用以上方法，得到裂纹面坐标系下，在无限远处受载荷 τ_{zx}^∞ ， τ_{zy}^∞ ， σ_z^∞ 时，三维双相材料与界面垂直坐标系下位移基本解。然后利用弹性理论及边界条件得到相对应的面力基本解。进而利用直角坐标系下张量变换规则，得出三维双相材料在界面斜交坐标系下位移及面力基本解。

2.1 基本理论

2.1.1 弹性力学基本方程

连续、均匀、各向同性弹性体在体积力 f_i ，面力 t_i 和边界约束作用下保持平衡。位移 u_i 、应变 ε_{ij} 和应力 σ_{ij} 在小变形条件下满足如下的弹性力学基本方程：

平衡方程：

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad x \in V \quad (2.1)$$

几何方程：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad x \in V \quad (2.2)$$

物理方程：

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad x \in V \quad (2.3)$$

边界上面力和应力关系：

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad x \in S \quad (2.4)$$

在以上各式中， x 为坐标向量， δ_{ij} 是 *Kronecker* δ 函数， V 表示弹性体， S 为弹性体边界， n_j 为边界 S 的外法线方向余弦， $\theta = u_{k,k}$ 是体积变形， λ, μ 为拉梅常数。在弹性体边界 S 上，通

常有如下的边界条件：

$$u_i = \bar{u}_i \quad x \in S^u \quad (2.5)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad x \in S^t \quad (2.6)$$

其中 S^u 和 S^t 分别表示边界 S 上给定位移 $\bar{u}_i$ 和面力 $\bar{t}_i$ 的部分。在实际问题中若在边界的同一部分上既有位移条件，又有面力条件，则此时位移条件与面力条件应该互补，即位移分量若为未知，则对应面力分量为已知，反之亦然。弹性力学问题就是要求在给定体力和边界条件下，求解以下的偏微分方程组：

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j} + f_i = 0 & x \in V \\ \sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) & x \in V \\ \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i & x \in S^t \\ u_i = \bar{u}_i & x \in S^u \end{cases} \quad (2.7)$$

2.1.2 Betti 互等定理

设在体力 f_i 和面力 t_i 作用下，弹性体内 V 将产生位移场 u_i ，又设同一弹性体在另外一组体力 f'_i 和面力 t'_i 的作用下将产生位移场 u'_i ，有如下积分等式存在：

$$\int_S t_i u'_i dS + \int_V f_i u'_i dV = \int_S t'_i u_i dS + \int_V f'_i u_i dV \quad (2.8)$$

贝蒂互等定理表达了同一个弹性体的两个不同的解之间存在的关系，即第一组外力在第二组外力作用下所产生的位移场所做的功等于第二组外力在第一组外力作用下所产生的位移场上所做的功。

2.1.3 Somigliana 位移公式

无限域中，边界 Γ 将其分为有限域 Ω 及无限域 Ω' ， Γ 为无限域的边界。 p 为由 Ω' 、 Ω 、 Γ 组成的无限域内的任意一点， q 为 Γ 上的任意一点， $U_{ij}(p, q)$ 、 $T_{ij}(p, q)$ 为 Ω 域内 p 点位移及面力的 *kelvin* 解。则 *Somigliana* 位移公式可表示为：

$$u_j(p) = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, q) t_i(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} T_{ij}(p, q) u_i(q) d\Gamma(q) + \int_V U_{ij}(p, q) f_i(q) dV \quad (2.9)$$

如果弹性体边界 Γ 上的位移 u_i 和面力 t_i 全部已知，则弹性体内任意点的位移值均可积分确定。因为此时场点 q 在边界 Γ 上，源点 p 在域 V 内。

2.1.4 其它基本方程

位移间断法基本公式:设在边界 Γ 两侧的面力是连续的,即 $t_i^-(q)=t_i^+(q)$,位移是不连续的 $\tilde{u}_i(q)=u_i^+(q)-u_i^-(q)$,则由 *Somigliana* 位移恒等式,位移间断法基本公式为:

$$u_i(p) = -\int_{\Gamma} T_{ij}(p,q)\tilde{u}_j(q)d\Gamma(q) \quad (2.10)$$

lame' - navier 平衡方程:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla^2\Phi) + \mu\nabla \times (\nabla^2\Psi) + f = 0 \quad (2.11)$$

helmholtz 弹性势:

$$\begin{cases} u = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \\ \nabla^2\Psi = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

poisson 方程:

$$\nabla^2 w = 0 \quad (2.13)$$

Newtonian 势:

$$\nabla^2 F = f \quad (2.14)$$

papkovich 张量方程:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left((1-2\nu) \frac{p_k r_k^\zeta \delta_{ij} - p_i r_j^\zeta - p_j r_i^\zeta}{\rho^3} - \frac{3p_k r_k^\zeta \bullet r_i^\zeta r_j^\zeta}{\rho^5} \right) \\ 2\mu u_{ij} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left((3-4\nu) \frac{p_i}{\rho} - \frac{p_j r_i^\zeta r_j^\zeta}{\rho^3} \right) \end{cases} \quad (2.15)$$

其中:

$$B_i = -\frac{p_i}{8\pi(1-2\nu)\rho}; \quad \beta_i = -\frac{\zeta_i p_i}{8\pi(1-2\nu)\rho}; \quad \rho = \sqrt{(x_i - \zeta_i)(x_i - \zeta_i)}; \quad r^\zeta = x - \zeta$$

2.2 位移基本解

弹性力学问题的基本解是应用超奇异积分方程与边界元方法的基础。为此, 本文根据上节中提到的方法, 具体分析了三维双相材料裂纹面坐标系下的基本解表达式。在此, 我们只以界面一侧(I)为例。为了书写简单方便, 我们取上标 I 或不应用上标。以后除特别声明, 一般都是采用界面一侧(I)的半空间中的基本解来讨论有关的力学问题。

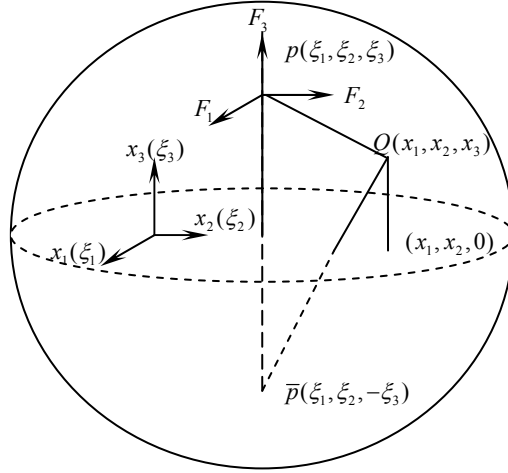


图 2.1 双相材料示意图

2.2.1 界面坐标系下基本解

如图 2.1 所示, 两三维半无限体结合, 假定平面界面理想结合, 并且位于直角坐标系 $x_i (i=1, 2, 3)$ 的 $x_1 O x_2$ 平面内; 上半空间区域用 I 表示, 下半空间区域用 II 表示, 空间区域 I 和 II 的材料常数分别用剪切弹性模量 μ_1, μ_2 和泊松比 ν_1, ν_2 表示。设在上半空间区域点 $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 作用集中力 $F(F_1, F_2, F_3)$ 。则复合材料空间位移场基本解可表示为:

$$G_{ij}^I = \frac{1}{2\mu_1} (\kappa_1 + 1) \Phi_{ij}^I - (x_k \Phi_{ik}^I + \Psi_{,j}^I) \quad (2.16)$$

$$G_{ij}^{II} = \frac{1}{2\mu_2} (\kappa_2 + 1) \Phi_{ij}^{II} - (x_k \Phi_{ik}^{II} + \Psi_{,j}^{II}) \quad (2.17)$$

其中, $i, j, k = 1, 2, 3, m = 1, 2$; Φ_{ij}^m 、 Ψ_{ij}^m 为 Papkovitch – Neuber 势函数。各分量表达式如下:

$$\Phi_{11}^{I(II)} = \Phi_{33}^{I(II)} = \frac{1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{2(I)}} \right) \quad (2.18)$$

$$\Phi'_{1(3)2} = \frac{x_{1(3)} - \xi_{1(3)}}{2\pi(\kappa_1 + 1)r_2} \left(\frac{A\kappa_1 - S}{r_3} - 2A \frac{\xi_2}{r_2^2} \right) \quad (2.19)$$

$$\Phi''_{22} = \frac{1 + A\kappa_2}{2\pi(\kappa_1 + 1)r_1} \quad (2.20)$$

$$\Psi'_{11} = \frac{(\xi_1 - x_1)}{2\pi(\kappa_1 + 1)r_3} \left[\left(\frac{A\kappa_1^2 + B - 2S\kappa_1}{2r_3} - \frac{(A\kappa_1 - S)\xi_2}{r_3} \right) - \frac{\xi_1}{r_1} - S \frac{\xi_1}{r_2} \right] \quad (2.21)$$

$$\Phi'_{22} = \frac{1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{A\kappa_1}{r_2} + \frac{2A\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^3} \right) \quad (2.22)$$

$$\Phi''_{1(3)2} = \frac{(x_{1(3)} - \xi_{1(3)})(A\kappa_2 - S + C3)}{4\pi(\kappa_1 + 1)r_1r_4} \quad (2.23)$$

$$\Psi^{I(II)}_{22} = \frac{1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(-\frac{\xi_2}{r_1} - \frac{A\kappa_{1(2)}\xi_2}{r_{2(1)}} + C2(1)\log r_{3(4)} \right) \quad (2.24)$$

$$\Psi''_{3(1)} = \frac{\xi_3 - x_3}{2\pi(\kappa_1 + 1)r_4} \left(A\kappa_2^2 + B - 2S\kappa_2 - \frac{A\kappa_2 - S}{r_1}\xi_2 \right) - \frac{\xi_3(S + 1)}{2\pi(\kappa_1 + 1)r_{1(3)}} \quad (2.25)$$

其中：

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

$$r_3 = r_2 + x_2 + \xi_2$$

$$r_4 = r_2 + x_2 - \xi_2$$

$$A = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1\mu_2}$$

$$B = \frac{\kappa_2\mu_1 - \kappa_1\mu_2}{\mu_2 + \kappa_2\mu_1}$$

$$S = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

2.2.2 与界面垂直坐标系下位移基本解

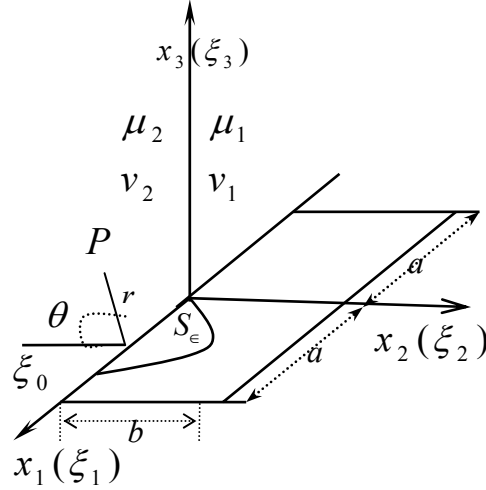


图 2.2 三维双相材料与界面垂直裂纹面示意图

如图 2.2 所示, 设在 $x_1 - x_2$ 面上存在空间任意形状裂纹 S , 在无限远处所受载荷为 $\tau_{zx}^\infty, \tau_{zy}^\infty, \sigma_z^\infty$ 。当基本解满足 *Cauchy-Riemann* 条件, 利用位移形式的 *lamé'-navier* 平衡方程, 及边界元形式下的 *Somigliana* 积分恒等式, 则在图 2.2 所示坐标系下三维双相材料位移基本解可表示为:

$$u_{31}' = \frac{1}{4\mu_1\pi(\kappa_1+1)}(x_1-\xi_1)(x_3-\xi_3)\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1}{r_2^3} - \frac{6Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{C}{r_2r_3^2}\right) \quad (2.26)$$

$$u_{13}' = \frac{1}{4\mu_1\pi(\kappa_1+1)}(x_1-\xi_1)(x_3-\xi_3)\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1}{r_2^3} - \frac{6Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{C}{r_2r_3^2}\right) \quad (2.27)$$

$$u_{32}' = \frac{1}{4\mu_1\pi(\kappa_1+1)}(x_3-\xi_3)\left(\frac{(x_2-\xi_2)}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1(x_2-\xi_2)}{r_2^3} + \frac{6Ax_2\xi_2(x_2+\xi_2)}{r_2^5} - \frac{C_1}{r_2r_3}\right) \quad (2.28)$$

$$u_{12}' = \frac{1}{4\mu_1\pi(\kappa_1+1)}(x_1-\xi_1)\left(\frac{(x_2-\xi_2)}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1(x_2-\xi_2)}{r_2^3} + \frac{6Ax_2\xi_2(x_2+\xi_2)}{r_2^5} - \frac{C_1}{r_2r_3}\right) \quad (2.29)$$

$$u_{21}' = \frac{1}{4\mu_1\pi(\kappa_1+1)}(x_1-\xi_1)\left(\frac{(x_2-\xi_2)}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1(x_2-\xi_2)}{r_2^3} - \frac{6Ax_2\xi_2(x_2+\xi_2)}{r_2^5} + \frac{C_1}{r_2r_3}\right) \quad (2.30)$$

$$u_{22}^I = \frac{1}{4\mu_1\pi(\kappa_1+1)} \left(\frac{\kappa_1 + \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{r_1^3} + \frac{C_2}{r_2} - \frac{2Ax_2\xi_2}{r_2^3} + \frac{A\kappa_1(x_2 + \xi_2)^2}{r_2^3}}{+ \frac{6Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)^2}{r_2^5}} \right) \quad (2.31)$$

$$u_{23}^I = \frac{x_3 - \xi_3}{4\mu_1\pi(\kappa_1+1)} \left(\frac{(x_2 - \xi_2)}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1(x_2 - \xi_2)}{r_2^3} - \frac{6Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^5} + \frac{C_1}{r_2r_3} \right) \quad (2.32)$$

$$u_{33}^I = \frac{1}{4\mu_1\pi(\kappa_1+1)} \left(\frac{\kappa_1 + \frac{(x_3 - \xi_3)^2}{r_1^3} + \frac{C_4}{r_2} + \frac{2Ax_2\xi_2}{r_2^3} + \frac{A\kappa_1(x_3 - \xi_3)^2}{r_2^3}}{- \frac{6Ax_2\xi_2(x_3 - \xi_3)^2}{r_2^5} + \frac{C}{r_3} - \frac{C(x_3 - \xi_3)^2}{r_2r_3^3}} \right) \quad (2.33)$$

u_{ij}^I 的第一个下标 i 表示点 p 在 x_i 坐标方向的位移分量, 第二个下标 j 则表示作用于点 q 的单位集中力指向 ξ_j 坐标方向; I 表示复合材料中的某一材料。其中:

$$C = A\kappa_1 - S + \frac{1}{2}(B + A\kappa_1^2 - 2S\kappa_1)$$

$$C_1 = \frac{A\kappa_1^2 - B}{2}$$

$$C_2 = \frac{B + A\kappa_1^2}{2}$$

$$C_3 = C_2 - C_4$$

$$C_4 = -A\kappa_1 + (1 + \kappa_1)S$$

2.2.3 在界面斜交坐标系下位移基本解

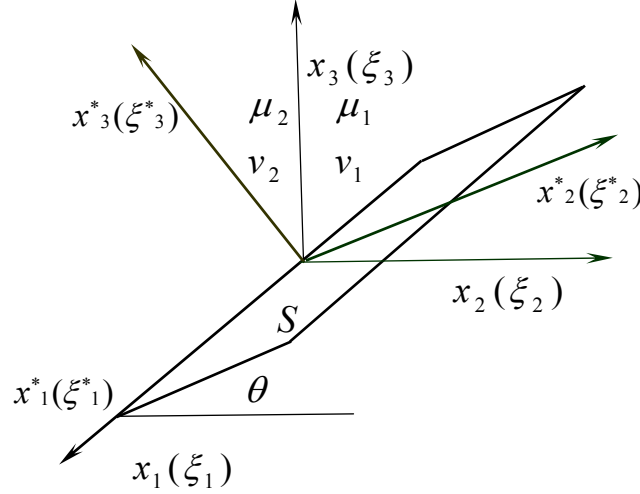


图 2.3 三维双相材料界面斜交裂纹面示意图

为了在以后章节计算和推导过程中，公式简洁，特规定：

$$X_m^n = (x_m^* - \xi_m^*)^n; \quad C_{p\theta}^q = (\cos p\theta)^q; \quad S_{p\theta}^q = (\sin p\theta)^q; \quad m = n = p = q = 1, 2, 3$$

如图 2.3 所示，利用直角坐标系下张量变换规则，通过推导，三维双相材料在界面斜交坐标系下位移场基本解表达式为：

$$u_{11}^I = \frac{1}{4\mu_1\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{\kappa_1}{r_1} + \frac{X_1^2}{r_1^3} + \frac{C_4}{r_2} + \frac{2A(x_2^*C_\theta - x_3^*S_\theta)(\xi_2^*C_\theta - \xi_3^*S_\theta)}{r_2^3} + \frac{C}{r_3} - \frac{CX_1^2}{r_2r_3^2} \right. \\ \left. + \frac{AK_1X_1^2}{r_2^3} - \frac{6A(x_2^*C_\theta - x_3^*S_\theta)(\xi_2^*C_\theta - \xi_3^*S_\theta)X_1^2}{r_2^5} \right) \quad (2.34)$$

$$u_{12}^I = \frac{X_1}{4\mu_1\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{(X_2C_\theta - X_3S_\theta)}{r_1^3} + \frac{AK_1(X_2C_\theta - X_3S_\theta)}{r_2^3} - \frac{C_1}{r_2r_3} \right. \\ \left. + \frac{6A(x_2^*C_\theta - x_3^*S_\theta)(\xi_2^*C_\theta - \xi_3^*S_\theta)(X_2C_\theta - (x_3^* + \xi_3^*)S_\theta)}{r_2^5} \right) \quad (2.35)$$

$$u_{13}^I = \frac{X_1(X_2S_\theta + X_3C_\theta)}{4\mu_1\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{AK_1}{r_2^3} - \frac{6A(x_2^*C_\theta - x_3^*S_\theta)(\xi_2^*C_\theta - \xi_3^*S_\theta)}{r_2^5} - \frac{C}{r_2r_3^2} \right) \quad (2.36)$$

$$u_{21}^I = \frac{X_1}{4\mu_1\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{(X_2C_\theta - X_3S_\theta)}{r_1^3} + \frac{AK_1(X_2C_\theta - X_3S_\theta)}{r_2^3} - \frac{6A(x_2^*C_\theta - x_3^*S_\theta)(\xi_2^*C_\theta - \xi_3^*S_\theta)(X_2C_\theta - X_3S_\theta)}{r_2^5} + \frac{C_1}{r_2r_3} \right) \quad (2.37)$$

$$u_{23}^I = \frac{X_2 S_\theta + X_3 C_\theta}{4\mu_1 \pi (\kappa_1 + 1)} \left(\frac{(X_2 C_\theta - X_3 S_\theta)}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1 (X_2 C_\theta - X_3 S_\theta)}{r_2^3} - \frac{6A(x_2^* C_\theta - x_3^* S_\theta)(\xi_2^* C_\theta - \xi_3^* S_\theta)(X_2 C_\theta - X_3 S_\theta)}{r_2^5} + \frac{C_1}{r_2 r_3} \right) \quad (2.38)$$

$$u_{31}^I = \frac{X_1 (X_2 S_\theta - X_3 C_\theta)}{4\mu_1 \pi (\kappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1}{r_2^3} - \frac{6A(x_2^* C_\theta - x_3^* S_\theta)(\xi_2^* C_\theta - \xi_3^* S_\theta)}{r_2^5} - \frac{C}{r_2 r_3^2} \right) \quad (2.39)$$

$$u_{32}^I = \frac{X_2 S_\theta + X_3 C_\theta}{4\mu_1 \pi (\kappa_1 + 1)} \left(\frac{X_2 C_\theta - X_3 S_\theta}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1 (X_2 C_\theta - X_3 S_\theta)}{r_2^3} - \frac{C_1}{r_2 r_3} + \frac{6A(x_2^* C_\theta - x_3^* S_\theta)(\xi_2^* C_\theta - \xi_3^* S_\theta)(X_2 C_\theta - X_3 S_\theta)}{r_2^5} \right) \quad (2.40)$$

$$u_{33}^I = \frac{1}{4\mu_1 \pi (\kappa_1 + 1)} \left(\frac{\kappa_1}{r_1} + \frac{(X_2 S_\theta + X_3 C_\theta)^2}{r_1^3} + \frac{C_4}{r_2} + \frac{2A(x_2^* C_\theta - x_3^* S_\theta)(\xi_2^* C_\theta - \xi_3^* S_\theta)}{r_2^3} + \frac{A\kappa_1 (X_2 S_\theta + X_3 C_\theta)^2}{r_2^3} - \frac{C}{r_3} - \frac{(X_2 S_\theta + X_3 C_\theta)^2}{r_2 r_3^3} - \frac{6A(x_2^* C_\theta - x_3^* S_\theta)(\xi_2^* C_\theta - \xi_3^* S_\theta)(X_2 S_\theta + X_3 C_\theta)^2}{r_2^5} \right) \quad (2.41)$$

其中：

$$r_1 = \sqrt{(x_1^* - \xi_1^*)^2 + (x_2^* - \xi_2^*)^2 + (x_3^* - \xi_3^*)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + 4(\xi_2^* C_\theta - \xi_3^* S_\theta)(x_2^* C_\theta - x_3^* S_\theta)}$$

$$r_3 = r_2 + (x_2^* + \xi_2^*)C_\theta - (x_3^* + \xi_3^*)S_\theta$$

2.3 面力基本解

2.3.1 与界面垂直坐标系下面力基本解

对位移基本解公式(2.26)–(2.33)应用弹性基本理论、边界条件，经过推导简化，可得到三维双相材料与界面垂直裂纹面坐标系下面力基本解表达式为：

$$T_{13}^I = \frac{(x_1 - \xi_1)}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{\kappa_1 - 1}{4r_1^3} + \frac{C_5}{r_2^3} + \frac{6Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{3A(3 - \kappa_1)x_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^5} + \frac{C}{r_2 r_3^2} \right) \quad (2.42)$$

$$T_{23}^I = \frac{1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & -\frac{(\kappa_1 - 1)(x_2 - \xi_2)}{2r_1^3} + \frac{C_6(x_2 + \xi_2) + 3A(\kappa_1 - 1)\xi_2}{r_2^3} + \frac{6Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^5} \\ & -\frac{3A(3 - \kappa_1)x_2(x_2 + \xi_2)^2}{r_2^5} - \frac{C_1}{r_2r_3} \end{aligned} \right) \quad (2.43)$$

$$T_{33}^I = \frac{(x_2 - \xi_2)}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2r_1^3} + \frac{C_8}{r_2^3} + \frac{18Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{3A(3 - \kappa_1)(x_2 + \xi_2)x_2}{r_2^5} + \frac{3C}{r_2r_3^2} \right) \quad (2.44)$$

$$T_{11}^I = \frac{x_3}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{(\kappa_1 - 1)}{2r_1^3} + \frac{3(x_1 - \xi_1)^2}{r_1^5} + \frac{C_4 - A\kappa_1}{2r_2^3} + \frac{6Ax_2\xi_2}{r_2^5} + \frac{3A\kappa_1(x_1 - \xi_1)^2}{r_2^5} \\ & -\frac{30Ax_2\xi_2(x_1 - \xi_1)^2}{r_2^7} + \frac{C}{r_2r_3^2} - \frac{2C(x_1 - \xi_1)^2}{r_2^2r_3^3} - \frac{C(x_1 - \xi_1)^2}{r_2^3r_3^2} \end{aligned} \right) \quad (2.45)$$

$$T_{21}^I = \frac{(x_1 - \xi_1)x_3}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{3(x_2 - \xi_2)}{r_1^5} + \frac{3A\kappa_1(x_2 - \xi_2)}{r_2^5} - \frac{30Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^7} + \frac{C_1}{r_2^2r_3^2} + \frac{C_1}{r_2^3r_3} \right) \quad (2.46)$$

$$T_{31}^I = \frac{(x_1 - \xi_1)}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{\kappa_1 - 1}{2r_1^3} + \frac{3x_3}{r_1^5} + \frac{C_4 - A\kappa_1}{2r_2^3} + \frac{6Ax_2\xi_2}{r_2^5} + \frac{3A\kappa_1x_3^2}{r_2^5} \\ & -\frac{30Ax_2\xi_2x_3^2}{r_2^7} + \frac{C}{r_2r_3^2} - \frac{Cx_3^2}{r_2^3r_3^2} - \frac{2Cx_3^2}{r_2^2r_3^3} \end{aligned} \right) \quad (2.47)$$

$$T_{12}^I = \frac{(x_1 - \xi_1)x_3}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{3(x_2 - \xi_2)}{r_1^5} + \frac{3A(\kappa_1 - 1)x_2}{r_2^5} - \frac{3A\kappa_1(x_2 + \xi_2)}{r_2^5} - \frac{30Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^7} \\ & + \frac{1}{2}(C - C_1)\left(\frac{1}{r_2^2r_3^2} + \frac{1}{r_2^3r_3}\right) \end{aligned} \right) \quad (2.48)$$

$$T_{22}^I = \frac{x_3}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{3(x_2 - \xi_2)^2}{r_1^5} + \frac{\kappa_1 - 1}{2r_1^5} + \frac{C_2 - A\kappa_1}{2r_2^3} - \frac{6Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{3A(\kappa_1 + 1)x_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^5} \\ & + \frac{3A\kappa_1(x_2 + \xi_2)^2}{r_2^5} + \frac{30Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^7} + \frac{C_1}{2r_2^2} \end{aligned} \right) \quad (2.49)$$

$$T_{32}^I = \frac{1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{(\kappa_1 - 1)(x_2 - \xi_2)}{2r_1^3} - \frac{A(\kappa_1 - 1)x_2}{r_2^3} - \frac{(C_4 - A\kappa_1)(x_2 + \xi_2)}{2r_2^3} - \frac{6Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^5} \\ & + \frac{3A(\kappa_1 - 1)x_2\xi_2}{r_2^5} + \frac{C - C_1}{2r_2r_3} \end{aligned} \right) \quad (2.50)$$

T_{ij}^I 的第一个下标 i 表示源点(加载点) p 在 x_i 坐标方向的面力分量, 第二个下标 j 则表示作用于场点 q 的单位集中力指向 ξ_j 坐标方向。此结果由 *Qin (2002)* 最早得到。其中:

$$C_5 = mA\kappa_1(\kappa_1 + 1) - A\kappa_1$$

$$C_6 = \frac{(3 - \kappa_1)^2}{2(\kappa_1 - 1)} A\kappa_1 - A(4\kappa_1 - 3)$$

$$C_7 = \frac{3A\kappa_1(3 - \kappa_1)}{\kappa_1 - 1}$$

$$C_8 = mA\kappa_1(\kappa_1 + 1) + S(\kappa_1 + 1) - 3A\kappa_1$$

2.3.2 在界面斜交坐标系下面力基本解

为了在以后章节计算和推导过程中，公式简洁，特规定： x_i^*, ξ_i^* 仍 x_i, ξ_i 表示， $i = 1, 2, 3$ 。对位移场基本解公式(2.33)–(2.41)应用弹性基本理论、边界条件，就可以得到三维双相材料在界面斜交坐标系下面力基本解表达式为：

$$T_{11}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{(\kappa_1 - C_\theta)x_3 - S_\theta X_2}{r_1^3} + \frac{(C_4 C_{2\theta} + 2AS_\theta^2 - A\kappa_1 C_\theta)x_2 + A\kappa_1 S_\theta \xi_2 + (C_4 S_{2\theta} - AS_{2\theta} - A\kappa_1 S_\theta)x_2}{r_2^3} + \frac{2CS_\theta X_1^2}{r_2^3} \right. \\ \left. - \frac{3X_1^2(S_\theta X_2 + x_3 + C_\theta x_3)}{r_1^5} + \frac{CS_\theta}{r_3^2} + \left(\frac{1}{r_2^2} + \frac{X_1^2}{r_2^3} + \frac{2X_1^2}{r_2^2} \right) C((C_\theta + C_{2\theta})x_3 + (S_{2\theta} + S_\theta)x_2 - S_\theta \xi_2) \right. \\ \left. + 15A\xi_2 \frac{(S_{2\theta}^2 - 2C_\theta^2 C_{2\theta} - 2C_\theta^3 - S_{2\theta} S_\theta)x_2 x_3 + 2S_{2\theta} C_\theta x_3^2 + 2C_\theta^2 x_2^2 + 2C_\theta^2 S_\theta x_2 \xi_2 - S_\theta S_{2\theta} x_3 \xi_2}{r_2^7} \right. \\ \left. + \frac{\xi_2((2AC_\theta^2 C_{2\theta} - AS_{2\theta}^2)x_2 x_3 + 2AS_{2\theta} C_\theta^2 x_2^2 - AS_{4\theta} x_3^2) + X_1^2(\varphi_3 x_3 + A\kappa_1 C_\theta C_{2\theta} - 2AC_\theta^2 x_2 - 3A\kappa_1 S_\theta \xi_2)}{r_2^5} \right) \quad (2.51)$$

$$T_{12}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & 3A\xi_2 \frac{x_2x_3 + S_{2\theta}(C_\theta x_2^2 - C_\theta x_2\xi_2 + S_\theta x_3\xi_2 - C_\theta x_3^2)}{r_2^5} - \frac{C_\theta x_3 + S_\theta X_2}{r_1^3} - \frac{C_1 S_\theta X_1}{r_2 r_3^2} + \\ & 3AX_1 \frac{\kappa_1 C_{3\theta} x_2 x_3 - (S_{2\theta} S_\theta + S_{2\theta} - \kappa_1 C_\theta C_{2\theta}) x_3 \xi_2 - C_\theta (\kappa_1 C_{2\theta} + 2C_\theta + 2C_\theta S_{2\theta}) x_2 \xi_2}{r_2^5} \\ & + AK_1 \frac{S_\theta X_1 - S_\theta X_2 + C_\theta x_3}{r_2^3} - \left(\frac{C_1}{r_2^3 r_3} + \frac{C_1}{r_2^2 r_3^2} \right) X_1 (C_{2\theta} x_3 + S_{2\theta} x_2) \\ & + \frac{15AX_1 \xi_2 (2C_\theta^2 x_2 - S_\theta x_3) ((C_\theta X_2^* - S_\theta x_3)(C_{2\theta} x_3 + S_{2\theta} x_2) - (S_\theta X_2 + C_\theta x_2) X_1)}{r_2^7} \\ & - \left(\frac{C}{r_2^3 r_3^2} + \frac{C}{r_2^2 r_3^3} \right) X_1 (S_\theta X_2 + C_\theta x_3) + \frac{3AK_1 (S_\theta X_2 + C_\theta x_3) X_1^2}{r_2^5} \\ & + \frac{3X_1 (S_\theta X_1 X_2 + C_\theta X_1 x_3 + C_\theta X_2 x_3 - S_\theta x_3^2)}{r_1^5} - \frac{C(S_\theta X_2 + C_\theta x_3)}{r_2^3 r_3^2} \end{aligned} \right) \quad (2.52)$$

$$T_{13}(x, \xi) = \frac{X_1}{4\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{m(\kappa_1 - 2 - 2C_\theta) - C_\theta}{r_1^3} + \frac{m(C_1 - 2AK_1 - 2AK_1 C_\theta) - AK_1 C_\theta}{r_2^3} + \frac{3Cm + C_1 m C_\theta + Cm C_\theta + CC_\theta}{r_2 r_3^2} \\ & + \frac{2Cm'S_\theta(S_\theta X_2 + C_\theta x_3)}{r_2 r_3^3} + \frac{\varphi_{53} x_2 \xi_2 + \varphi_{38} x_3 \xi_2 + \varphi_{39} x_2^2 + \varphi_{40} x_2 x_3 + 3AK_1 C_\theta (m' C_{2\theta} x_3^2 + m \xi_2^2)}{r_2^5} \\ & - \left(\frac{1}{r_2^3 r_3} + \frac{1}{r_2^2 r_3^2} \right) C_1 m (S_{2\theta} x_3 + C_{2\theta} x_2) + \frac{mX_1^2 + mC_\theta X_2^2 + S_\theta X_2 x_3 + m' C_\theta x_3^2}{r_1^5} \\ & - 15AS_{2\theta} x_3^2 \xi_2 \frac{(mS_{2\theta} C_\theta + m' C_{2\theta} S_\theta) \xi_2 - (mS_{2\theta} S_\theta + m' C_{2\theta} C_\theta) x_3}{r_2^7} - \frac{\varphi_{23} x_3^2 \xi_2 + \varphi_{15} x_2^2 \xi_2}{r_2^7} \\ & \frac{30AC_\theta^2 (mC_{2\theta} C_\theta - m' S_{2\theta} S_\theta) x_2 \xi_2^2 - 15AS_{2\theta} (mC_{2\theta} C_\theta - m' S_{2\theta} S_\theta) x_3 \xi_2 - \varphi_{37} x_2 x_3 \xi_2}{r_2^7} \\ & - x_2 x_3 \xi_2^2 \frac{30AC_\theta^2 (S_{2\theta} C_\theta + m' C_{2\theta} S_\theta)}{r_2^7} \\ & - \left(\frac{2C}{r_2^2 r_3^3} + \frac{C}{r_2^3 r_3^2} \right) (mX_1^2 + m'S_\theta X_2 (C_{2\theta} x_3 + S_{2\theta} x_2) + m' C_\theta x_3 (C_{2\theta} x_3 + S_{2\theta})) \end{aligned} \right) \quad (2.53)$$

$$T_{21}(x, \xi) = \frac{X_1}{4\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{1.5S_{2\theta}X_2^2 - X_2x_3^3}{r_1^5} + \frac{15AS_{2\theta}\xi_2(x_3^3 - 2C_\theta^3x_2^2\xi_2)}{r_2^7} + \frac{x_2^2 + \varphi_{24}x_2\xi_2 + \varphi_{17}x_2x_3}{r_2^5} \\ & + \left(\frac{1}{r_2^3r_3} + \frac{1}{r_2^2r_3^2} \right) C_1 \left(X_2S_\theta + x_3(C_{2\theta} + C_\theta) + x_2S_{2\theta} \right) + \frac{S_\theta}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1S_\theta}{r_2^3} \\ & - \frac{1.5A\kappa_1S_{2\theta}\xi_2^2 - \varphi_4x_3\xi_2 - \varphi_{20}x_3^2}{r_2^5} + \frac{15Ax_2\xi_2(x_2^2 + x_3 + x_3\xi_2 - x_3^2)}{r_2^7} \\ & - \frac{15AS_{2\theta}(x_3x_2^2\xi_2 - 0.5S_{2\theta}x_3\xi_2^3 + x_3^2\xi_2^2 + C_\theta^2x_2\xi_2^3)}{r_2^7} \end{aligned} \right) \quad (2.54)$$

$$T_{22}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{x_2(\varphi_{19}x_2x_3 + \varphi_{34}\xi_2x_3 + \varphi_{18}x_2\xi_2 + \varphi_{16}\xi_2^2 + \varphi_{14}\xi_2 - 6A\kappa_1S_\theta x_3)}{r_2^5} + \frac{\varphi_{18}x_3^2\xi_2^2}{r_2^7} \\ & + \frac{6A\kappa_1C_\theta\xi_2^2 + \varphi_8x_3\xi_2^2}{r_2^5} + \frac{(S_{2\theta} - C_\theta^2)X_2}{r_1^3} + \frac{A\kappa_1S_{2\theta}\xi_2 + 2A\kappa_1C_\theta}{r_2^3} - \frac{C_1C_\theta}{r_2r_3^2} + \frac{C_1C_\theta}{r_2r_3} \\ & + \frac{3S_\theta^2X_2^2x_3 + S_{2\theta}(3x_2 - A\kappa_1\xi_2)x_3^2 + 3C_\theta^2x_3^3}{r_1^5} - \left(\frac{1}{r_2^3r_3} + \frac{1}{r_2^2r_3^2} \right) C_1(S_{2\theta}x_2 - C_{2\theta}x_3 - \xi_2) \\ & + \frac{x_2(\varphi_{14}x_2x_3^2\xi_2 + 30AC_\theta^3S_{2\theta}x_2\xi_2(x_2X_2 - \xi_2^2) + 15A(3S_\theta^2S_{2\theta} - 4C_\theta^4C_{2\theta})x_2^2x_3\xi_2)}{r_2^7} \\ & + \frac{x_2(\varphi_{24}x_2x_3\xi_2^2 + \varphi_{34}x_3\xi_2^2)}{r_2^7} \end{aligned} \right) \quad (2.55)$$

$$T_{23}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{\varphi_{12}x_2 + \varphi_{13}\xi_2 + \varphi_5x_3}{r_1^3} - 3m \frac{C_{2\theta}X_2x_3^2 + S_\theta x_3(X_1^2 + C_\theta X_2^2)}{r_1^5} + \frac{\varphi_{43}x_2 + \varphi_{41}\xi_2 + 3AS_\theta^2(m\kappa_1S_\theta S_{2\theta} - S_{2\theta})x_3}{r_2^3} \\ & + \frac{\varphi_{65}x_2^2\xi_2 + \varphi_{66}x_2\xi_2x_3 + \varphi_{67}x_2\xi_2^2 + \varphi_{44}x_3^2\xi_2 + \varphi_{45}x_2^2x_3 + 1.5A\kappa_1S_{2\theta}(m'S_{2\theta} + 1)x_3\xi_2^2 + \varphi_{46}x_2x_3^2}{r_2^5} \\ & + \frac{\varphi_{47}x_2^3 + 1.5A\kappa_1(2mC_\theta^2 - m'S_{2\theta})\xi_2^3 + 3m\kappa_1X_1^2(C_\theta X_2 + S_\theta x_3) + \varphi_{41}x_3^3}{r_2^5} - \frac{m'C_1S_\theta(S_\theta X_2 + x_3)}{r_2r_3^2} \\ & + \left(\frac{C_1}{r_2^3r_3} + \frac{C_1}{r_2^2r_3^2} \right) \left(mX_1^2 + m'S_{2\theta}x_2(x_3 + S_\theta X_2) + m'C_{2\theta}x_3(C_{2\theta}x_3 - S_\theta\xi_2) \right) - m'C \frac{C_\theta + C_1m}{r_2r_3} \\ & + \frac{\varphi_{48}x_2^3x_3 + \varphi_{68}x_2^2\xi_2x_3 + \varphi_{29}x_2^2x_3^2 + \varphi_{75}x_2x_3^2\xi_2 + \varphi_{27}x_2x_3^3 + \varphi_{56}x_2x_3\xi_2^2 + \varphi_{21}x_3^2\xi_2^2 + \varphi_{30}x_3^3\xi_2}{r_2^7} \\ & + \frac{-\varphi_9x_3^4 + \varphi_{61}x_2^4 + \varphi_{10}x_2^2\xi_2^2 - X_1^2(C_\theta^2x_2^2 + C_\theta^2x_2\xi_2 - S_{2\theta}x_2x_3 - C_\theta x_3\xi_2 - S_\theta^2x_3^2)}{r_2^7} \end{aligned} \right) \quad (2.56)$$

$$T_{31}(x, \xi) = \frac{X_1}{4\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{\kappa_1 - S_\theta}{r_1^3} + \frac{C_4 - A\kappa_1 S_\theta}{r_2^3} + \frac{3(S_\theta X_2 + C_\theta x_3)(S_\theta X_2 + (C_\theta + 1)x_3)}{r_1^5} + \frac{2CS_\theta(S_\theta X_2 + C_\theta x_3)}{r_2 r_3^2} \right. \\ \left. \frac{(S_{2\theta} + S_{3\theta})x_2 x_3 (2C_\theta^2 x_2 + S_{2\theta} x_3^2) - (S_{2\theta} + S_\theta C_{2\theta})x_3 \xi_2 (2C_\theta^2 x_2 + S_{2\theta} x_3)}{r_2^7} \right. \\ \left. - 15A\xi_2 \frac{+(C_\theta^2 + C_\theta C_{2\theta})x_3^2 (2C_\theta^2 x_2 - S_{2\theta} x_3) + S_\theta(S_\theta + S_{2\theta})x_2^2 (2C_\theta^2 x_2 - S_{2\theta} x_3)}{r_2^7} \right. \\ \left. - 15A\xi_2 \frac{-S_\theta(2S_\theta + S_{2\theta})x_2 \xi_2 (2C_\theta^2 x_2 - S_{2\theta} x_3) + S_\theta^2 \xi_2^2 (2C_\theta^2 x_2 - S_{2\theta} x_3)}{r_2^7} + \frac{C(1 + S_\theta)}{r_2 r_3^2} \right. \\ \left. + \frac{3A(S_\theta + 1)\xi_2}{r_2^5} \left((\varphi_{61}x_2 x_3 + \varphi_{10}x_3^2 + \varphi_{11}x_2^2 + \varphi_{25}x_3 \xi_2 + \varphi_{11}x_2 \xi_2) 2C_\theta^2 x_2 + 6A\kappa_1 S_\theta^2 x_2 \xi_2^2 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{C}{r_2^3 r_3^2} + \frac{2C}{r_2^2 r_3^3} \right) \left(S_\theta(S_\theta + S_{2\theta})x_2^2 + (C_\theta C_{2\theta} + C_\theta^2)x_3^2 - S_\theta(2S_\theta + S_{2\theta})x_2 \xi_2 + S_\theta^2 \xi_2^2 \right) \right. \\ \left. + (S_{3\theta} + S_\theta)x_2 x_3 - (S_\theta C_{2\theta} + S_{2\theta})x_3 \xi_2 \right) \quad (2.57)$$

$$T_{32}(x, \xi) = \frac{X_1}{4\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{3(m'S_{2\theta} + C_\theta m)X_2 + 2S_{2\theta}x_3}{r_1^3} + \frac{4.5S_{2\theta}X_2^2 x_3 + 3(C_\theta^2 + C_{2\theta})X_2 x_3^2 + X_2^3 - 1.5S_{2\theta}x_3^3}{r_1^5} \right. \\ \left. \frac{\varphi_{56}x_2 - \varphi_{62}\xi_2}{r_2^3} + \frac{2C_\theta(S_\theta^2 X_2^2 + S_{2\theta}X_2 x_3 + C_\theta^2 x_3^2)}{r_2 r_3^3} - \left(\frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_2 r_3} \right) C_1 C_\theta \right. \\ \left. + \frac{C_1 S_\theta + (C_1 - 1)S_{2\theta}x_3 - (2S_\theta^2 - C_1)\xi_2}{r_2 r_3^2} + \frac{15AS_{2\theta}^2 x_2 \xi_2 X_2 - \varphi_{41}x_3^4 \xi_2}{r_2^7} \right. \\ \left. + \frac{\varphi_{62}x_2^2 \xi_2 + \varphi_{55}x_2 \xi_2^2 + \varphi_{57}x_2 x_3 \xi_2 - \varphi_{60}x_3 \xi_2^2 + (C_{2\theta} + C_\theta^2)S_{2\theta}x_3^2 \xi_2}{r_2^5} \right. \\ \left. + 15AS_{2\theta}x_2 x_3 \frac{(1.5S_{2\theta} + S_\theta S_{3\theta})x_2 + (2C_\theta^2 - S_{3\theta}S_\theta)x_3}{r_2^5} \right. \\ \left. + \frac{\varphi_{22}x_2^2 \xi_2 x_3 - \varphi_{55}x_2^2 x_3^2 \xi_2 + \varphi_{57}x_3^3 \xi_2 x_2 + \varphi_{57}x_2^2 x_3 \xi_2^2 + \varphi_{62}x_3^2 \xi_2^3}{r_2^7} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{r_2^3 r_3^2} + \frac{2}{r_2^2 r_3^3} \right) (S_\theta^2 X_2^2 + S_{2\theta}X_2 x_3 + C_\theta^2 x_3^2) (C_{2\theta}x_3 + S_{2\theta}x_2) - \frac{18A^2 \kappa_1 S_\theta^2 \xi_2^3}{r_2^5} \right. \\ \left. - \left(\frac{C_1}{r_2^3 r_3} + \frac{C_1}{r_2^2 r_3^2} \right) (S_\theta X_2 + C_\theta x_3) (C_{2\theta}x_3 + S_{2\theta}x_2) \right) \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
 T_{33}(x, \xi) = & \frac{1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \\
 & \left(\frac{\varphi_1 x_3 + \varphi_6 X_2}{r_1^3} + \frac{\varphi_{38} x_2 + \varphi_{36} \xi_2 + \varphi_{39} x_3}{r_2^3} + \frac{C_1 m C_\theta + \varphi_{60} x_3 + 15 A m C_\theta S_{2\theta} (C_\theta - 1) x_2 + S_\theta (2m' - 1) \xi_2}{r_2^2} \right. \\
 & + \frac{\varphi_2 X_2^2 + 3m' C_\theta^2 x_3^2 + 3m S_\theta X_1^2 X_2 - 3m C_\theta X_1^2 x_3 - \varphi_{71} x_3 X_2}{r_1^5} + \frac{C_1 m' S_\theta}{r_3^2} + \frac{7.5 A m S_{2\theta}^2 \xi_2^2 x_3^3}{r_2^7} \\
 & + \left(\frac{1}{r_2^3 r_3^2} + \frac{1}{r_2^2 r_3^3} \right) \left(S_{2\theta} S_\theta^2 x_2 (X_2 x_2 + \xi_2) + C_{2\theta} S_\theta^2 x_3 \xi_2 \right) + \frac{X_1^2 \xi_2 (\varphi_7 x_2 x_3 + 15 A m S_{2\theta} (S_\theta x_3 - C_\theta x_2))}{r_2^7} \\
 & + \frac{\varphi_{63} x_2^2 \xi_2 + \varphi_{73} x_2 \xi_2^2 + \varphi_{64} x_2 x_3 \xi_2 + \varphi_{72} x_3 \xi_2^2 + \varphi_{73} x_2^2 x_3 + \varphi_{35} x_2^3 + \varphi_{69} x_2^2 x_3^2 + \varphi_{49} x_2^2 \xi_2 - \varphi_{33} x_3^3}{r_2^5} \\
 & + \frac{15 A (m' S_{2\theta}^2 S_{4\theta} - 0.5 m S_{4\theta}) (S_{2\theta} x_2^2 x_3 - 2 C_\theta^2 x_2^3 + S_{2\theta} x_2 \xi_2 x_3 + 2 C_\theta^2 x_2^2 \xi_2)}{r_2^7} + \frac{1.5 A \kappa_1 S_{2\theta} X_2 \xi_2 - C_\theta^2 x_3 \xi_2}{r_2^5} \\
 & + \frac{x_2 \xi_2 (\varphi_{32} x_3^2 x_2 + \varphi_{31} x_2^2 \xi_2 x_3 + \varphi_{32} \xi_2 x_3^2 + 7.5 A m (S_{2\theta}^2 C_{2\theta} - 2 C_\theta^2 S_\theta) \xi_2^3 + \varphi_{34} x_3 \xi_2^2 - C_\theta^2 x_3 \xi_2)}{r_2^7} - \frac{C_\theta^2 x_3 \xi_2}{r_2^5} \\
 & + \frac{\varphi_7 \xi_2^2 x_3 + \varphi_{30} x_3^3 - 15 A m C_\theta^2 S_{4\theta} x_2^2 x_3^2 + \varphi_{62} x_2^2 \xi_2 x_3^2 + \varphi_{71} \xi_2 x_3^4 + \varphi_{74} x_2^2 \xi_2^3}{r_2^7} + \frac{1.5 A \kappa_1 S_{2\theta} X_2 \xi_{22}}{r_2^5} \\
 & + 2m' \frac{S_\theta^3 X_2^2 + S_\theta^3 S_{2\theta} X_2 + C_\theta^2 S_\theta x_3^2}{r_2^3 r_3^2} + \frac{C_1 m S_\theta}{r_2 r_3} + \left(\frac{1}{r_2^3 r_3^2} + \frac{1}{r_2^2 r_3^3} \right) C_{2\theta} x_3^2 (C_\theta^2 x_3 - S_{2\theta} \xi_2) \\
 & \left. \left(\left(\frac{1}{r_2^3 r_3} + \frac{1}{r_2^2 r_3^2} \right) \left(S_\theta ((C_{2\theta} + 1) x_2 \xi_2 - C_{2\theta} x_2^2 + \xi_2^2) - x_3 (C_{3\theta} x_2 - (S_\theta S_{2\theta} + C_\theta) \xi_2 + C_\theta S_{2\theta} x_3^2) \right) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

此结果为首次得到。

2.4 本章小结

本章应用张量变换及弹性理论，对已有三维双相材料位移基本解做了进一步整理。推导出三维双相材料与界面垂直坐标系下空间位移、面力基本解表达式。推导出三维双相材料在界面斜交坐标系下空间位移、面力基本解表达式。

第三章 三维双相材料裂纹问题的超奇异积分方程组

在弹性力学中, 边界积分方程、变分原理和基本微分方程是等价的。这三条途径在理论上都可以求出弹性力学的唯一解。但已有力学解析解几乎全部是用基本微分方程来求出的。对于数值解, 情况有所不同, 由基本微分方程导致有限差分法, 由变分原理出发导致有限元法, 由边界积分方程出发导致边界元法。

本章在前面已有的面力基本解基础上, 应用弹性力学的物理方程, 可以得到弹性体内任意点的应力积分表达形式, 然后再利用边界条件及超奇异方法(Joakimidis 1982)通过复杂的推导, 把三维双相材料与界面垂直裂纹问题及与界面斜交裂纹问题各自归结为求解一超奇异积分方程组问题。并对三维双相材料与界面垂直裂纹问题, 使用有限部分积分方法, 以位移间断为未知函数, 通过分析裂纹尖端应力场奇异性指数得到应力强度因子的计算公式。

3.1 与界面垂直裂纹问题的超奇异积分方程组

三维双相材料内部任一点位移, 由公式(2.10)确定, 而在相应点上的应力分量可以通过一定的关系式求得。对于 x 点上在 k 方向上的位移是:

$$u_k(x) = \int_S T_{ki}(x, \xi) \tilde{u}_i(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (3.1)$$

将公式(2.9)代入公式(2.3)中, 可以求出三维双相材料内部任意一点应力为:

$$\sigma_{ij}(x) = \int_S S_{kij}(x, \xi) \tilde{u}_k(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (3.2)$$

其中 S_{kij} 被称为应力积分核函数。

3.1.1 应力积分核函数 S_{kij} 推导

通过对公式(2.42)–(2.50)的面力基本解进行求导, 再应用弹性理论及边界条件, 经过繁杂的推导, 简化后可得到三维双相材料与界面垂直裂纹面坐标系上的应力积分核函数 S_{kij} 表达式:

$$S'_{113} = \frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2r_1^3} + \frac{3(3 - \kappa_1)[(x_1 - \xi_1)^2 + x_3^2]}{4r_1^5} - \frac{15x_3^2(x_1 - \xi_1)^2}{r_1^7} + \frac{7A\kappa_1 + 4C - C_4}{4r_1^3} \right. \\ & - \frac{9(A\kappa_1 - C_4)}{4r_1^7} + \frac{30Ax_2\xi_2(x_1 - \xi_1)^2x_3^2}{r_2^7} + \frac{210Ax_2\xi_2(x_1 - \xi_1)^2x_3^2}{r_2^9} \\ & \left. - 3C(x_1 - \xi_1)^2x_3^2 \left(\frac{2}{r_2r_3^3} - \frac{2}{r_2^4r_3^3} - \frac{1}{r_2^5r_3^2} \right) \right) \end{aligned} \right) \quad (3.3)$$

$$S'_{123} = \frac{\mu_1(x_1 - \xi_1)}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{3(3 - \kappa_1)(x_2 - \xi_2)}{4r_1^5} + \frac{3(4A + 3A\kappa_1 - C_4)(x_2 + \xi_2)}{4r_2^5} + \frac{3A(\kappa_1 - 1)x_2}{r_2^5} + \frac{30Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^7} + \frac{1}{2}(C + C_1)\left(\frac{1}{r_2^2r_3^2} + \frac{1}{r_2^3r_3}\right) \right) \quad (3.4)$$

$$S'_{213} = \frac{\mu_1(x_1 - \xi_1)}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{3(3 - \kappa_1)(x_2 - \xi_2)}{4r_1^5} - \frac{15x_3^2(x_2 - \xi_2)^3x_3^2}{r_1^7} + \frac{3(A\kappa_1 + C_4)(x_2 + \xi_2)}{4r_2^5} + \frac{3A(\kappa_1 - 1)x_2}{r_2^5} + \frac{30Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^7} - \frac{15A(\kappa_1 - 1)}{r_2^7} + \frac{1}{2}(C + C_1)\left(\frac{1}{r_2^2r_3^2} + \frac{1}{r_2^3r_3} - \frac{2x_3^2}{r_2^3r_3^3} - \frac{3x_3^2}{r_2^4r_3^2} - \frac{3x_3^2}{r_2^5r_3}\right) - \frac{210Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)x_3^2}{r_2^9} \right) \quad (3.5)$$

$$S'_{223} = \frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2r_1^3} + \frac{3(3 - \kappa_1)((x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2)}{4r_1^5} - \frac{15x_3^2(x_1 - \xi_1)^2}{r_1^7} + \frac{C - C_1 + A - A\kappa_1}{4r_2^3} + (A\kappa_1 + C_4 - 4A)\frac{3(x_2 + \xi_2)^2}{4r_2^5} + (2C_1 - C + A\kappa_1 + C_2 - 2A)\frac{3x_3^2}{4r_2^5} + \frac{30A(x_1 - \xi_1)^2x_2x_3^2}{r_2^7} - \frac{15A(x_2 + \xi_2)^2x_3^2}{r_1^7} + \frac{210Ax_2\xi_2(x_1 - \xi_1)^2x_3^2}{r_2^7} \right) \quad (3.6)$$

$$S'_{233} = \frac{\mu_1(x_1 - \xi_1)x_3}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{3(x_2 - \xi_2)}{r_1^5} - \frac{15(x_2 - \xi_2)x_3^2}{r_1^7} + \left(\frac{3}{2}(C_4 + A\kappa_1) - 3mA(3 + \kappa_1) \right) \frac{(x_2 + \xi_2)}{r_2^5} + \frac{6A(2\kappa_1 - 3)x_2}{r_2^5} + \frac{15A(\kappa_1 - 1)x_2x_3^2}{r_2^7} + \frac{90Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{r_2^7} + \frac{75A(3 - \kappa_1)x_2(x_2 + \xi_2)^2}{r_2^7} + \frac{30mA(x_2 + \xi_2)^3}{r_2^7} - \frac{210Ax_2\xi_2(x_2 + \xi_2)x_3^2}{r_2^9} + \frac{1}{2}(C - C_1)\left(\frac{3}{r_2^2r_3^2} + \frac{3}{r_2^3r_3} - \frac{2x_3^2}{r_2^3r_3^3} - \frac{3x_3^2}{r_2^4r_3^2} - \frac{3x_3^2}{r_2^5r_3}\right) \right) \quad (3.7)$$

$$S'_{333} = \frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{6x_3^2}{r_1^5} - \frac{15x_3^4}{r_2^7} + \left(S(\kappa_1 + 1) - \frac{3}{2}A(\kappa_1^2 - 2\kappa_1 + 3) \right) \frac{1}{r_2^3} - \frac{6Cx_3^4}{r_2^3r_3^4} - \frac{6Cx_3^4}{r_2^4r_3^2} - \frac{3Cx_3^4}{r_2^5r_3^2} - \left(12Ax_2\xi_2 - A(3 - \kappa_1)(\kappa_1 - 1)(x_2 + \xi_2)^2 \right) \frac{3}{2r_2^5} + \left(4A\kappa_1 + A(\kappa_1^2 - 1)(S + 1) \right) \frac{3x_3^2}{2r_2^5} - \frac{180Ax_2\xi_2x_3^2}{r_2^7} - \frac{15A\kappa_1x_3^4}{r_2^7} - \frac{15A(3 - \kappa_1)(x_2 + \xi_2)^2x_3^2}{r_2^7} + \frac{210Ax_2\xi_2x_3^4}{r_2^9} + \frac{3C}{r_2^3r_3^2} - \frac{6Cx_3^2}{r_2^2r_3^2} - \frac{12Cx_3^2}{r_2^2r_3^3} \right) \quad (3.8)$$

3.1.2 与界面垂直裂纹问题的超奇异积分方程组

如图 2.2 所示, 把公式(3.3)–(3.8)代入裂纹面 S 外 x 点应力公式(3.2)中, 并应用边界条件, 通过繁杂推导简化, 三维双相材料与界面垂直裂纹问题可归结为求一超奇异积分方程组问题, 此积分方程组具体表达式为:

$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1+1)} \oint_S \left(\frac{\kappa_1-1}{2r_1^3} \delta_{\alpha\beta} + \frac{3(3-\kappa_1)}{4r_1^3} r_{1,\alpha} r_{1,\beta} + K_{\alpha\beta}(x, \xi) \right) \tilde{u}_\beta(\xi) dS(\xi) = -p_\alpha(x) \\ \frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1+1)} \oint_S \left(\frac{1}{r_1^3} + K_{00}(x, \xi) \right) \tilde{u}_3(\xi) dS(\xi) = -p_3(x) \end{cases} \quad (3.9)$$

其中:

$$K_{11}(x, \xi) = \frac{\kappa_1-1}{2r_1^3} + \frac{3(3-\kappa_1)(x_1-\xi_1)^2}{4r_1^5} - \frac{4C-C_4+7A\kappa_1}{4r_2^3} + \frac{24Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{3C}{r_2r_2^3} - (3A\kappa_1-C_4) \frac{3(x_2+\xi_2)^2}{4r_2^5} + \frac{30A(x_1-\xi_1)^2x_2\xi_2}{r_2^7} \quad (3.10)$$

$$K_{12}(x, \xi) = (x_1-\xi_1) \left(\frac{3(3-\kappa_1)(x_2-\xi_2)}{4r_1^5} + (C_4+4\kappa_1-4A\kappa_1) \frac{3(x_2+\xi_2)}{4r_2} + \frac{3A(\kappa_1-1)x_2}{r_2^5} + \frac{30A(x_2+\xi_2)}{r_2^7} + \frac{1}{2}(C-C_1) \left(\frac{1}{r_2^2r_3^2} + \frac{1}{r_2^3r_3} \right) \right) \quad (3.11)$$

$$K_{21}(x, \xi) = (x_1-\xi_1) \left(\frac{3(3-\kappa_1)(x_2-\xi_2)}{4r_1^5} + \frac{3}{4}(-C_4+4A+3A\kappa_1) \frac{x_2+\xi_2}{r_2^5} + \frac{3A(\kappa_1-1)x_2}{r_2^5} + \frac{30Ax_2\xi_2(x_2+\xi_2)}{r_2^7} + \frac{1}{2}(C-C_1) \left(\frac{1}{r_2^2r_3^2} + \frac{1}{r_2^3r_3} \right) \right) \quad (3.12)$$

$$K_{22} = \frac{\kappa_1-1}{2r_1^3} + \frac{3(3-\kappa_1)(x_1-\xi_1)^2}{4r_1^5} - \frac{A+B-S\kappa_1-S}{2r_2^3} + \frac{24Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \left(\frac{3}{4}(\kappa_1+1)S - 4A \right) \frac{(x_2+\xi_2)^2}{r_2^5} - \frac{30A(x_1-\xi_1)^2x_2\xi_2}{r_2^7} \quad (3.13)$$

$$K_{00} = \frac{S(\kappa_1+1)}{r_2^3} - \frac{3A(\kappa_1^2-2\kappa_1+3)}{2r_2^3} - \frac{3}{2r_2^5} (12Ax_2\xi_2 - A(3-\kappa_1)(\kappa_1-1)(x_2+\xi_2)^2) + \frac{3C}{r_2r_3^2} \quad (3.14)$$

结果最早由 *Qin (2002)* 得到。

3.2 与界面斜交裂纹问题的超奇异积分方程组

3.2.1 应力积分核函数 S_{kij} 推导

通过对公式(2.51)–(2.59)的面力基本解进行求导，再应用弹性理论及边界条件，经过繁杂的推导，简化后可得到界面斜交裂纹坐标系下的应力积分核函数 S_{kij} 公式：

$$S_{311} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{2C_7C_\theta}{r_1^3} - \frac{3C_8C_\theta X_1^2}{r_1^5} - \frac{3C_8C_\theta x_3^2}{r_1^5} - \frac{60C_\theta X_1^2 x_3^2}{r_1^7} - \frac{\phi_9}{r_2^3} - \frac{\phi_{21}X_1^2}{r_2^5} - \frac{\phi_{28}x_3^2}{r_2^5} + \frac{60AC_\theta x_3 X_1}{r_2^7} - \frac{\phi_{10}X_2' x_3}{r_2^5} \\ & + \frac{3C_8S_\theta X_2 x_3}{r_1^5} + 60S_\theta \frac{X_1^2 X_2 x_3}{r_1^7} + \frac{3C_6S_\theta x_3 X_2'^2}{r_2^5} + \frac{60A\kappa_1 S_\theta x_3 X_2 X_1^2}{r_2^7} - \frac{12C_4S_\theta x_3 X_2'}{r_2^5} \\ & + \frac{60AC_4S_\theta x_3 X_2' X_1^2}{r_2^7} - C_2S_\theta X_1 \left(\frac{1}{r_2^2 r_3^2} + \frac{1}{r_2^3 r_3} \right) + C_2S_\theta X_1 X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) \end{aligned} \right) \quad (3.15)$$

$$S_{312} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{30S_{2\theta} X_1 x_3 X_2^2}{r_1^7} - \frac{3C_9S_{2\theta} X_1 x_3}{r_1^5} - \frac{30S_{2\theta} X_1 x_3^2}{r_1^7} - \frac{\phi_{18} X_1 X_2'}{r_2^5} + \frac{30A\kappa_1 S_{2\theta} X_1 X_2'^3}{r_2^7} \\ & + \frac{30A\kappa_1 S_{2\theta} X_1 X_2' x_3^3}{r_2^7} - \frac{60AS_{2\theta} X_1 x_3^2 X_2'}{r_2^7} - \frac{12C_4S_{2\theta} x_3 X_2'}{r_2^5} + \frac{30C_4S_{2\theta} x_3^3 X_1}{r_2^7} \\ & - \frac{C_2S_{2\theta} X_1}{2r_2^2 r_3^2} - \frac{C_2S_{2\theta} X_1}{2r_2^3 r_3} + 0.5C_2S_{2\theta} X_1 X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) \\ & - \frac{3C_8C_{2\theta} X_1 X_2}{r_1^5} - \frac{60C_{2\theta} x_3^2 X_2 X_1}{r_1^7} - \frac{\phi_{23} X_2' X_1}{r_2^5} + \frac{60AC_{2\theta} X_1 X_2' x_3^2}{r_2^7} \end{aligned} \right) \quad (3.16)$$

$$S_{313} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{6C_7S_\theta^2 X_1 x_3}{r_1^5} - \frac{60S_\theta^2 X_1 x_3^3}{r_1^7} - \frac{\phi_4 X_1 x_3}{r_2^5} - \frac{120A\kappa_1 S_\theta^2 X_1 x_3 X_2'^2}{r_2^5} - \frac{120AC_8S_\theta^2 X_1 x_3^3}{r_2^7} - \frac{60AS_{2\theta} X_2' x_3^2}{r_2^5} \\ & - \frac{\phi_{23} X_1}{r_2^5} - \frac{60C_4S_\theta^2 X_1 X_2'^2 x_3}{r_2^7} + \frac{60AS_\theta^2 X_1 x_3^3}{r_2^7} + \frac{C_2S_\theta^2 X_1}{r_2^2 r_3^2} + \frac{C_2S_\theta^2 X_1}{r_2^3 r_3} + \frac{120AC^2 X_1 x_3^2}{r_2^7} \\ & - C_2S_\theta^2 X_1 X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) - \frac{12C_\theta^2 X_1 X_2}{r_1^5} - \frac{60C_\theta^2 x_3^2 X_2 X_1}{r_1^7} - \frac{\phi_{13} x_3 X_1}{r_2^5} \\ & - \frac{24AC_\theta^2 X_1}{r_2^5} + \frac{120AC_\theta^2 X_1 x_3^3}{r_2^7} + \frac{3C_8S_{2\theta} X_1 X_2}{r_1^5} + \frac{60S_{2\theta} X_1 X_2 x_3}{r_1^7} + \frac{\phi_{24} X_2' X_1}{r_2^5} \end{aligned} \right) \quad (3.17)$$

$$S_{321} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{3C_6 S_\theta X_1 x_3}{r_1^5} + \frac{60S_\theta X_1 x_3 X_2^2}{r_1^7} + \frac{\phi_3 X_1 x_3}{r_2^5} + \frac{60A\kappa_1 S_\theta X_1 x_3 X_2'^3}{r_2^7} - \frac{12C_4 S_\theta x_3 X_1}{r_2^5} \\ & + \frac{60C_4 S_\theta x_3 X_2'^2 X_1}{r_2^7} - \frac{C_2 S_\theta X_1}{r_2^2 r_3^2} - \frac{C_2 S_\theta X_1}{r_2^3 r_3} + C_2 S_\theta X_1 X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) \\ & - \frac{3C_8 C_\theta X_1 X_2}{r_1^5} - \frac{60C_\theta x_3^2 X_2 X_1}{r_1^7} - \frac{\phi_{25} X_2' X_1}{r_2^5} + \frac{60AC_\theta X_1 X_2' x_3^2}{r_2^7} \end{aligned} \right) \quad (3.18)$$

$$S_{322} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{30S_{2\theta} X_2^3 x_3}{r_1^7} - \frac{30S_{2\theta} X_2 x_3^3}{r_1^7} - \frac{\phi_{30} X_2 x_3}{r_2^5} + \frac{30A\kappa_1 S_{2\theta} X_2'^3 x_3}{r_2^7} + \frac{30A\kappa_1 S_{2\theta} X_2' x_3^3}{r_2^7} \\ & - \frac{60AS_{2\theta} X_2' x_3^3}{r_2^7} - \frac{24C_4 S_{2\theta} x_3 X_2'}{r_2^5} + \frac{30C_4 S_{2\theta} x_3 X_2'^2}{r_2^7} + \frac{30AS_{2\theta} X_2 x_3^3}{r_2^7} - \frac{3C_2 S_{2\theta} X_2'}{2r_2^2 r_3^3} \\ & - \frac{3C_2 S_{2\theta} X_2'}{2r_2^4 r_3} - \frac{60C_{2\theta} X_2^2 x_3^2}{r_1^7} + 0.5C_2 S_{2\theta} X_2'^3 \left(\frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) + \frac{2C_7 C_{2\theta}}{r_1^3} \\ & - \frac{3C_8 C_{2\theta} X_2^2}{r_1^5} - \frac{3C_8 C_{2\theta} x_3^2}{r_1^5} - \frac{\phi_{12}}{r_2^3} - \frac{\phi_{26} X_2'^2}{r_2^5} - \frac{\phi_{27} x_3^2}{r_2^5} + \frac{60AC_{2\theta} X_2'^2 x_3^2}{r_2^7} \end{aligned} \right) \quad (3.19)$$

$$S_{323} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & -\frac{2C_7 S_\theta^2}{r_1^3} + \frac{3C_8 S_\theta^2 X_2^2}{r_1^5} + \frac{3C_8 S_\theta^2 x_3^2}{r_1^5} + \frac{60S_\theta^2 x_3^2 X_2^2}{r_1^7} + \frac{12x_3 X_2}{r_1^5} - \frac{60S_\theta^2 X_2^2 x_3}{r_1^7} + \frac{60C_\theta^2 X_2 x_3^2}{r_1^7} \\ & + \frac{\phi_{11}}{r_2^3} + \frac{\phi_{22} X_2'^2}{r_2^5} + \frac{\phi_{29} x_3^2}{r_2^5} - \frac{60S_{2\theta} X_2'^2 x_3^2}{r_2^7} + \frac{\phi_{32} X_2' x_3}{r_2^5} + \frac{60S_{2\theta} x_3^3 X_2'}{r_2^7} - \frac{60A\kappa_1 S_\theta^2 X_2'^2 x_3}{r_2^7} \\ & - \frac{60AC_8 S_\theta^2 x_3^3 X_2'}{r_2^7} + \frac{48S_\theta^2 x_3 X_2'}{r_2^5} + \frac{3C_2 S_\theta^2 X_2'}{r_2^2 r_3^2} + \frac{C_2 S_\theta^2 X_2'}{r_2^3 r_3} - C_2 S_\theta^2 X_2' X_1^2 \left(\frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) \\ & - \frac{60C_4 S_\theta^2 X_2' x_3^3}{r_2^7} + \frac{24Ax_3 X_2'}{r_2^5} - \frac{120AX_2^3 x_3^3}{r_2^7} - \frac{60C_4 S_\theta^2 x_3 X_2'^3}{r_2^9} \end{aligned} \right) \quad (3.20)$$

$$S_{331} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{\phi_{32} X_2 X_1}{r_1^5} + \frac{60S_\theta X_1 X_2^3}{r_1^7} + \frac{12C_\theta x_3 X_1}{r_1^5} - \frac{60C_\theta X_1 x_3^3}{r_1^7} - \frac{\phi_{18} X_1 X_2}{r_2^5} \\ & + \frac{\phi_4 X_1 X_2^3}{r_2^7} + 60A \left(\frac{2S_\theta x_2 \xi_2 X_1 X_2}{r_2^7} + \frac{3C_\theta x_3^3 X_1}{r_2^7} - \frac{6C_\theta x_2 \xi_2 X_1 x_3}{r_2^7} \right) \\ & - 840Ax_2 \xi_2 X_1 \left(\frac{S_\theta x_3^2 X_2}{r_2^9} - C_\theta \frac{x_3^3}{r_2^9} \right) + \frac{\phi_{25} x_3^2 X_1 X_2}{r_2^7} - \frac{\phi_{23} X_1 x_3}{r_2^5} \end{aligned} \right) \quad (3.21)$$

$$S_{332} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{2\phi_9}{r_1^3} - \frac{3\phi_9 X_2^2}{r_1^5} + \frac{\phi_{20} x_3^2}{r_1^5} + \frac{12C_{2\theta} X_2' x_3}{r_1^5} + 30 \frac{S_{2\theta} X_2^2 x_3^2 - S_{2\theta} x_3^4 - 2C_{2\theta} X_2 x_3^3}{r_1^7} + \frac{\phi_9}{r_2^3} + \\ & \frac{\phi_{21} X_2'^2 - \phi_{28} X_2' x_3 - \phi_{03} x_3^2}{r_2^5} + 24A \frac{S_{2\theta} x_2 \xi_2 - C_{2\theta} x_3 X_2'}{r_2^5} + \frac{\phi_{11} x_3^4 + \phi_{22} x_3^2 X_2'^2 + 180AC_{2\theta} X_2' x_3^3}{r_2^7} \\ & + 60Ax_2 \xi_2 \frac{6(C_{2\theta} - S_{2\theta}) X_2' x_3 + 2S_{2\theta} X_2'^2 - 5S_{2\theta} x_3^2}{r_2^7} - 3\phi_{29} X_2'^4 \left(\frac{1}{r_2^5 r_3^2} + \frac{2}{r_2^4 r_3^3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^4} \right) \\ & + 420Ax_2 \xi_2 \frac{S_{2\theta} x_3^4 - S_{2\theta} X_2^2 x_3^2 - 2C_{2\theta} X_2' x_3^3}{r_2^9} - \frac{3\phi_{29}}{r_2^2 r_3^2} + 6\phi_{29} \left(\frac{1}{r_2^3 r_3^2} + \frac{1}{r_2^2 r_3^3} \right) X_2'^2 \end{aligned} \right) \quad (3.22)$$

$$S_{333} = \frac{\mu_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \left(\begin{aligned} & \frac{\phi_7}{r_1^3} + \frac{\phi_4 X_2^2}{r_1^5} + \frac{\phi_6 x_3^2}{r_1^5} - \frac{12S_{2\theta} x_3 X_2'}{r_1^5} + 60 \frac{S_{2\theta} x_3^3 X_2' - S_{2\theta}^2 x_3^2 X_2'^2 - C_{2\theta}^2 x_3^4}{r_1^7} + \frac{\phi_3}{r_2^3} - \frac{\phi_{15} X_2'^2}{r_2^5} \\ & + \frac{\phi_1 x_3^2}{r_2^5} + \frac{\phi_{31} x_3 X_2'}{r_2^5} + \frac{\phi_{17} x_2 \xi_2}{r_2^5} - \frac{180AS_{2\theta} X_2' x_3^3}{r_2^7} - \frac{\phi_{16} x_3^4}{r_2^7} + \frac{\phi_{33} X_2'^2 x_3^2}{r_2^7} - \frac{\phi_8 x_2 \xi_2 x_3^2}{r_2^7} \\ & - 120A \frac{S_{2\theta}^2 x_2 \xi_2 X_2'^2 + 3S_{2\theta} x_2 \xi_2 x_3 X_2'}{r_2^7} + 840Ax_2 \xi_2 \frac{S_{2\theta}^2 x_3^2 X_2'^2 + S_{2\theta} x_3^3 X_2 + C_{2\theta}^2 x_3^4}{r_2^9} \end{aligned} \right) \quad (3.23)$$

其中: $X_m^n = (x_m^* + \xi_m^*)^n$, m, n 为正整数。从 S_{kij} 的具体表达公式可见, 公式中出现了 $\frac{1}{r^n}$ 因子, 当内点靠近边界时, 在靠近的边界上被积函数变化剧烈, 数值积分时应考虑其对精度的影响。

3.2.2 与界面斜交裂纹问题的超奇异积分方程组

如图 2.3 所示, 把公式(3.15)–(3.23)代入斜裂纹面 S 外超 x^* 点应力公式中, 并应用边界条件, 通过繁杂推导简化, 则三维双相材料界面斜交裂纹问题可归结为求一超奇异积分方程组问题, 此积分方程组具体表达式为:

$$\left\{ \begin{aligned} & \oint_S \left[\left(\frac{\kappa_1 - 1}{2r_1^3} \delta_{\alpha\beta} + \frac{3(3 - \kappa_1)}{4r_1^3} r_{1,\alpha} r_{1,\beta} \right) \tilde{u}_\beta(\xi^*) + K_{\alpha j}(x^*, \xi^*) \tilde{u}_j(\xi^*) \right] dS(\xi^*) = -\frac{\pi(\kappa_1 + 1)p_\alpha(x^*)}{\mu_1} \\ & \oint_S \left(\frac{1}{r_1^3} \tilde{u}_3(\xi^*) + K_{3j}(x^*, \xi^*) \tilde{u}_j(\xi^*) \right) dS(\xi^*) = -\frac{\pi(\kappa_1 + 1)p_3(x^*)}{\mu_1} \end{aligned} \right. \quad (3.24)$$

其中: $\alpha, \beta = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$ $\xi^* \in S$, K_{ij} 为

$$K_{11} = \frac{\omega_{12}}{r_2^3} + \frac{x_2 \xi_2 \omega_{19} + X_1^2 \omega_{21}}{r_2^5} - \frac{x_2^2 \xi_2^2 X_1^2 \omega_2}{r_2^9} + \frac{120 A S_\theta^2 x_2 \xi_2 (x_2 \xi_2 S_{2\theta}^2 + 3 X_1^2 - 4 X_1^2 S_\theta^2)}{r_2^7} \quad (3.25)$$

$$6 S_\theta^2 \omega_7 \left(\frac{1}{r_2 r_3^2} - X_1^2 X_2'^2 C_\theta^2 \left(\frac{1}{r_2^5 r_3^2} + \frac{2}{r_2^4 r_3^3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^4} \right) \right)$$

$$K_{12} = -X_1 \left[\begin{aligned} & \frac{\omega_{26} x_2 + \omega_{20} X_1}{r_2^5} + \frac{120 A S_\theta^2 x_2 \xi_2 (\omega_5 x_2 + (3 - 4 S_\theta^2) X_2')}{r_2^7} + \frac{\omega_2 x_2 \xi_2 (2 S_\theta^2 x_2 - C_\theta^2 X_2')}{r_2^9} \\ & + S_\theta^2 \omega_8 \left(\frac{1}{r_2^3 r_3} + \frac{1}{r_2^2 r_3^2} - C_\theta^2 X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) \right) \\ & + 1.5 S_{2\theta}^2 \omega_7 X_2' \left(\frac{1}{r_2^3 r_3^2} + \frac{2}{r_2^2 r_3^3} - C_\theta^2 X_2'^2 \left(\frac{1}{r_2^5 r_3^2} + \frac{2}{r_2^4 r_3^3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^4} \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (3.26)$$

$$K_{13} = -X_1 C_\theta \left[\begin{aligned} & \frac{\omega_{22} x_2 + \omega_{13} X_2'}{r_2^5} - 6 S_\theta^3 \omega_7 X_1 \left(\frac{1}{r_2^3 r_3^2} + \frac{2}{r_2^2 r_3^3} - C_\theta^2 X_2'^2 \left(\frac{1}{r_2^5 r_3^2} + \frac{2}{r_2^4 r_3^3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^4} \right) \right) \\ & \frac{2 S_\theta \omega_2 x_2^3 \xi_2^2}{r_2^9} + S_\theta^2 \omega_8 \left(\frac{1}{r_2^3 r_3} + \frac{1}{r_2^2 r_3^2} - C_\theta^2 X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) \right) \\ & - \frac{120 A S_\theta^2 x_2 \xi_2 (\omega_{15} x_2 - (\kappa_1 - 1) S_\theta X_2')}{r_2^7} \end{aligned} \right] \quad (3.27)$$

$$K_{21} = X_1 \left[\begin{aligned} & \frac{\omega_{26} x_2 - \omega_{20} X_1}{r_2^5} + \frac{120 A S_\theta^2 x_2 \xi_2 (\omega_5 x_2 + (3 - 4 S_\theta^2) X_2')}{r_2^7} + \frac{\omega_2 x_2 \xi_2 (2 S_\theta^2 x_2 - C_\theta^2 X_2')}{r_2^9} \\ & + S_\theta^2 \omega_8 \left(\frac{1}{r_2^3 r_3} + \frac{1}{r_2^2 r_3^2} - C_\theta^2 X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) \right) \\ & + 1.5 S_{2\theta}^2 \omega_7 X_2' \left(\frac{1}{r_2^3 r_3^2} + \frac{2}{r_2^2 r_3^3} - C_\theta^2 X_2'^2 \left(\frac{1}{r_2^5 r_3^2} + \frac{2}{r_2^4 r_3^3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^4} \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (3.28)$$

$$K_{22} = \frac{x_2 \xi_2 \omega_{27} + \omega_{17} X_2'^2 + \omega_{14}}{r_2^5} + \frac{60 A S_\theta^2 x_2 \xi_2 (\omega_5 x_2 \xi_2 + \omega_{10} X_2'^2)}{r_2^7} - \frac{\omega_2 x_2^2 \xi_2^2 (4 S_\theta^4 x_2 \xi_2 - C_{2\theta} X_2'^2)}{r_2^9} \quad (3.29)$$

$$- 1.5 S_{2\theta}^2 \omega_7 \left(\frac{1}{r_2 r_3^2} - 2 C_\theta^2 X_2'^2 \left(\frac{1}{r_2^3 r_3^2} + \frac{2}{r_2^2 r_3^3} \right) + C_\theta^4 X_2'^4 \left(\frac{1}{r_2^5 r_3^2} + \frac{2}{r_2^4 r_3^3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^4} \right) \right) + \frac{\omega_{18}}{r_2^3}$$

$$K_{23} = C_\theta \left[\begin{aligned} & \frac{\omega_{16} x_2 X_2' + \omega_{24} X_2'^2 + \omega_{25} x_2 \xi_2}{r_2^5} + \frac{120 A S_\theta^2 x_2 \xi_2 (S_\theta C_{2\theta} (\kappa_1 X_2' - X_2' - 6 x_2) X_2' + \omega_{11} x_2 \xi_2)}{r_2^7} + \\ & \frac{4 \omega_2 x_2^3 \xi_2 (2 S_\theta^2 X_2' + S_\theta S_{2\theta} \xi_2)}{r_2^9} - S_\theta^2 \omega_8 X_1 \left(\frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{3}{r_2^4 r_3^2} - C_\theta^2 X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^5 r_3} + \frac{3}{r_2^4 r_3^2} + \frac{2}{r_2^3 r_3^3} \right) \right) \\ & \frac{\omega_9}{r_2^3} - 6 S_\theta^2 \omega_7 \left(\frac{1}{r_2 r_3^2} - \frac{2 C_\theta^2 X_2'^2}{r_2^3 r_3^2} - \frac{4 C_\theta^2 X_2'^2}{r_2^2 r_3^3} + C_\theta^4 X_2'^4 \left(\frac{1}{r_2^5 r_3^2} + \frac{2}{r_2^4 r_3^3} + \frac{2}{r_2^3 r_3^4} \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (3.30)$$

$$K_{31} = X_1 C_\theta \left[\begin{aligned} & \frac{\omega_{22}x_2 + \omega_{13}X_2'}{r_2^5} + 6S_\theta^3\omega_7X_1 \left(\frac{1}{r_2^3r_3^2} + \frac{2}{r_2^2r_3^3} - C_\theta^2X_2'^2 \left(\frac{1}{r_2^5r_3^2} + \frac{2}{r_2^4r_3^3} + \frac{2}{r_2^3r_3^4} \right) \right) \\ & \frac{2S_\theta\omega_2x_2^3\xi_2^2}{r_2^9} + S_\theta^2\omega_8 \left(\frac{1}{r_2^3r_3} + \frac{1}{r_2^2r_3^2} - C_\theta^2X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^5r_3} + \frac{3}{r_2^4r_3^2} + \frac{2}{r_2^3r_3^3} \right) \right) \\ & - \frac{120AS_\theta^2x_2\xi_2(\omega_{15}x_2 - (\kappa_1 - 1)S_\theta X_2')}{r_2^7} \end{aligned} \right] \quad (3.31)$$

$$K_{32} = C_\theta \left[\begin{aligned} & \frac{\omega_{16}x_2X_2' + \omega_{24}X_2'^2 + \omega_{25}x_2\xi_2}{r_2^5} + \frac{120AS_\theta^2x_2\xi_2(S_\theta C_{2\theta}(X_2'\kappa_1 - X_2' - 6x_2)X_2' + \omega_{11}x_2\xi_2)}{r_2^7} + \\ & \frac{4\omega_2x_2^3\xi_2(2S_\theta^2X_2' + S_\theta\xi_2)}{r_2^9} + S_\theta^2\omega_8X_1 \left(\frac{3}{r_2^3r_3} + \frac{3}{r_2^2r_3^2} - C_\theta^2X_2'^2 \left(\frac{3}{r_2^5r_3} + \frac{3}{r_2^4r_3^2} + \frac{2}{r_2^3r_3^3} \right) \right) \\ & \left(\frac{\omega_{23}}{r_2^3} - 6S_\theta^2\omega_7 \left(\frac{1}{r_2^3r_3^2} - \frac{2C_\theta^2X_2'^2}{r_2^3r_3^2} - \frac{4C_\theta^2X_2'^2}{r_2^2r_3^3} + C_\theta^4X_2'^4 \left(\frac{1}{r_2^5r_3^2} + \frac{2}{r_2^4r_3^3} + \frac{2}{r_2^3r_3^4} \right) \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (3.32)$$

$$K_{33} = \frac{\omega_{30}}{r_2^3} + \frac{\omega_{28}x_2\xi_2 + \omega_{19}X_2'^2}{r_2^5} + \frac{60Ax_2\xi_2S_{2\theta}^2(\omega_3X_2'^2 - \omega_6x_2\xi_2)}{r_2^7} + \frac{S_{2\theta}^2\omega_2x_2^3\xi_2^3}{r_2^9} \\ + 6S_\theta^4\omega_7 \left(\frac{1}{r_2^3r_3^2} - 2X_2'^2C_\theta^2 \left(\frac{1}{r_2^3r_3^2} + \frac{2}{r_2^2r_3^3} \right) + C_\theta^4X_2'^4 \left(\frac{1}{r_2^5r_3^2} + \frac{2}{r_2^4r_3^3} + \frac{2}{r_2^3r_3^4} \right) \right) \quad (3.33)$$

此结果首次得到。

3.3 裂纹尖端奇性应力场

参照三维双相材料与界面垂直三维 I 型裂纹问题的分析方法(Qin 2002), 可以得到三维双相材料与界面垂直三维剪切型裂纹问题的裂纹尖端应力奇性。如图 2.2 所示, S_ϵ 为裂纹面上包含 ξ_0 点一半圆形小区域, 根据弹性理论, 裂纹尖端 ξ_0 的位移间断可表示为:

$$\tilde{u}_\alpha(\xi) = D_\alpha(\xi_0)\xi_\alpha^{\lambda_\alpha} \quad 0 < \text{Re}(\lambda_\alpha) < 1 \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.34)$$

利用主部分析法, 可以得到以下关系式:

$$\int_{S_\epsilon} \left(-\frac{1}{2r_1^3} + \frac{3x_3^2}{2r_1^5} \right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \cong \pi D_2(\theta) r^{\lambda-1} \frac{\lambda \cos(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta)}{\sin \lambda\theta} \quad (3.35)$$

$$\int_{S_e} - \left(\frac{3x_2(x_2 - \xi_2)}{r_1^5} + \frac{15x_2(x_2 - \xi_2)x_3^2}{r_1^7} \right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.36)$$

$$\cong \pi D_2(\theta) r^{\lambda-1} \frac{2\lambda(1-\lambda)\cos\theta\cos(\lambda\pi+2\theta-\lambda\theta)}{\sin\lambda\theta}$$

$$\int_{S_e} \left(-\frac{1}{4r_1^3} - \frac{3(x_1 - \xi_1)^2}{4r_1^5} \right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad (3.37)$$

$$\int_{S_e} \left(\frac{7}{4r_1^3} - \frac{9(x_1 - \xi_1)^2}{4r_1^5} - \frac{15(x_2 - \xi_2)^2 x_3^2}{r_1^7} \right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.38)$$

$$= \frac{\pi D_2(\theta) r^{\lambda-1} \lambda}{2\sin\lambda\pi} (-(1+\lambda)\cos(\lambda\pi+\theta-\lambda\theta) - (1-\lambda)\cos(\lambda\pi+3\theta-\lambda\theta))$$

$$\int_{S_e} x_2 \left(\frac{3(x_2 - \xi_2)}{r_1^5} + \frac{3}{r_1^2 r_4^2} + \frac{3}{r_1^3 r_4} - (x_1 - \xi_1)^2 x_3^2 \left[\frac{6}{r_1^4 r_4^4} + \frac{12}{r_1^5 r_4^3} + \frac{15}{r_1^6 r_4^2} + \frac{15}{r_1^7 r_4} \right] \right) \tilde{u}_1 ds = 0 \quad (3.39)$$

$$\int_{S_e} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{3}{r_1 r_4^2} + (x_1 - \xi_1)^2 x_3^2 \left(\frac{6}{r_1^3 r_4^4} + \frac{6}{r_1^4 r_4^3} + \frac{3}{r_1^5 r_4^2} \right) \right) \tilde{u}_1 ds = 0 \quad (3.40)$$

$$\int_{S_e} \left(-\frac{1}{4r_1^3} - \frac{3(x_2 - \xi_2)^2}{4r_1^5} \right) \tilde{u}_1 ds = \frac{1}{2\sin\lambda_1\pi} \pi D_1(\theta) r^{\lambda_1-1} \lambda_1 \cos(\lambda_1\pi + \theta - \lambda_1\theta) \quad (3.41)$$

$$\int_{S_e} \left(\frac{7}{4r_1^3} + \frac{9(x_2 - \xi_2)^2}{4r_1^5} - \frac{15(x_1 - \xi_1)^2 x_3^2}{r_1^7} \right) \tilde{u}_1 ds = \frac{-1}{2\sin\lambda_1\pi} \pi D_1(\theta) r^{\lambda_1-1} \lambda_1 \cos(\lambda_1\pi + \theta - \lambda_1\theta) \quad (3.42)$$

把所求关系式(3.35)—(3.43)带入积分核 S_{kij} 公式(3.3)—(3.8)中，可以得到裂纹尖端应力场具体表达式：

$$\sigma_{13} = -\frac{u_1 \Gamma D_1(\theta) \lambda_1 r^{\lambda_1-1}}{(\Gamma+1) \sin \lambda_1 \pi} \cos(\lambda_1 \pi + \theta - \lambda_1 \theta) \quad (3.43)$$

$$\sigma_{23} = \frac{u_1 \lambda D_2(\theta) r^{\lambda-1}}{(k_1+1) \sin \lambda \pi} \{ [(A-1+\lambda(2A-B-1))\cos(\lambda\pi+\theta-\lambda\theta) + (1-\lambda)(B-1)\cos(\lambda\pi+3\theta-\lambda\theta)] \} \quad (3.44)$$

具体过程详见^[4, 5]。

3.4 裂纹尖端应力强度因子

裂纹尖端应力强度因子可定义为：

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{23}(r, \theta)(2r)^{1-\lambda} \quad (3.45)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{13}(r, \theta)(2r)^{1-\lambda} \quad (3.46)$$

把裂纹尖端应力场公式(3.43)—(3.44)分别带入公式(3.45)—(3.46)可以得到裂纹尖端应力强度因子的表达式:

$$K_{II} = \frac{2^{1-\lambda_1} \mu_1 \lambda_1 w D_2(\xi_0)}{(1 + \kappa_1) \sin(\lambda_1 \pi)} \quad (3.47)$$

$$K_{III} = \frac{2^{1-\lambda_2} \mu_1 \mu_2 \lambda_1 w D_1(\xi_0)}{(\mu_1 + \mu_2) \sin(\lambda_2 \pi)} \quad (3.48)$$

3.5 本章小结

本章应用弹性理论、边界条件、超奇异积分与边界元方法,通过烦琐的推导,将三维双相材料与界面垂直裂纹问题及与界面斜交裂纹问题各自归结为求解一以裂纹面位移间断为未知函数的超奇异积分方程组问题。并对三维双相材料与界面垂直剪切型裂纹问题的裂纹尖端应力奇异性指数、奇异性应力场进行了理论分析,得到裂纹尖端应力强度因子计算公式。

第四章 三维双相材料裂纹问题的数值方法

利用上章所求结果,以反映裂纹前沿应力奇性的密度函数基本解表示位移间断。根据 *Taylor* 展开特性,对超奇异积分方程组的超奇异部分处理。再利用有限部积分理论,计算解耦后的代数方程组,得到应力强度因子的数值方法表达式。

4.1 密度函数

超奇异积分方程组通常意义下无法得到解析解,只能通过数值方法获得数值解。根据裂纹尖端应力奇性和文献^[5]中数值方法,把 *I* 型问题的数值方法推广到 *II & III* 型中,即可得到三维剪切型裂纹应力强度因子的数值解法。本文以典型三维矩形剪切型裂纹为例,利用超奇异积分方程未知解在裂纹前沿的解析分析结果,以及因子法和有限部积分法,为三维双相材料中与界面垂直的剪切型裂纹问题建立了数值求解方法,给出了超奇异积分的具体计算公式,并给出了裂纹前沿应力强度因子的计算表达式。以密度函数基本解表示的位移间断函数为:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N F_1(\xi_1, \xi_2) \xi_2^{\lambda_1} \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} \\ \tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N F_2(\xi_1, \xi_2) \xi_2^{\lambda_2} \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} \end{cases} \quad (4.1)$$

其中位移间断权函数 F_1 、 F_2 具体表达式为:

$$\begin{cases} F_1(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn}^1 \xi_1^m \xi_2^n \\ F_2(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn}^2 \xi_1^m \xi_2^n \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2 超奇异积分处理

位移间断中的 a_{mn}^1 与 a_{mn}^2 为待定的未知常数,当裂纹表面受到切向均布载荷作用时,把奇性指数代入超奇异积分方程组中,应力强度因子的积分方程组即可转化为线性代数方程组。表达式为:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(a_{mn}^1 \left((I_{mnj}^{111}(x_1, x_2) + I_{mnj}^{112}(x_1, x_2)) + a_{mn}^2 \left((I_{mnj}^{121}(x_1, x_2) + I_{mnj}^{122}(x_1, x_2)) \right) \right) = -\frac{\pi(\kappa_1 + 1)p_1}{\mu_1} \\ \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(a_{mn}^1 \left((I_{mnj}^{211}(x_1, x_2) + I_{mnj}^{212}(x_1, x_2)) + a_{mn}^2 \left((I_{mnj}^{221}(x_1, x_2) + I_{mnj}^{222}(x_1, x_2)) \right) \right) = -\frac{\pi(\kappa_1 + 1)p_2}{\mu_1} \end{cases} \quad (4.3)$$

其中, $n=0,1$, $j=1,2,3,\dots, KK, LL$ 为边界配置点数, 通常 KK, LL 应大于联立方程组中的未知数 a_{mn}^1, a_{mn}^2 的总个数, 即: $KK, LL \geq 2(M+1)(N+1)$ 。采用线性最小二乘法求解联立线性方程组, 即可确定未知系数。 $I^{\alpha\beta}_{mn}$ 为已知积分函数, 当源点 (ξ_1, ξ_2) 与场点 (x, y) 重合的时候, 上式中的积分 $I^{\alpha\beta 2}_{mn}$ 是普通的二维积分, 可用 *Gauss* 数值积分进行运算, 但是积分 $I^{\alpha\beta 1}_{mn}$ 则具有超奇异性 $O(r^{-3})$, 数值运算需要进行特殊处理。两部分具体表达式为, 超奇异部分 $I^{\alpha\beta 1}_{mn}$:

$$\begin{cases} I^{111}_{mn} = \oint_S \left(\frac{k_1 - 1}{2r_1^3} + \frac{3(3 - k_1) \cos^2 \theta}{4r_1^5} \right) \xi_1^m \xi_2^{\lambda_1+n} \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ I^{121}_{mn} = \oint_S \left(\frac{3(3 - k_1) \sin 2\theta}{8r_1^5} \right) \xi_1^m \xi_2^{\lambda_1+n} \times \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ I^{211}_{mn} = \oint_S \left(\frac{3(3 - k_1) \sin 2\theta}{8r_1^5} \right) \xi_1^m \xi_2^{\lambda_2+n} \times \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ I^{221}_{mn} = \oint_S \left(\frac{k_1 - 1}{2r_1^3} + \frac{3(3 - k_1) \sin^2 \theta}{4r_1^5} \right) \xi_1^m \xi_2^{\lambda_2+n} \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

及 *Cauchy* 主值意义积分 $I^{\alpha\beta 2}_{mn}$

$$\begin{cases} I^{112}_{mn} = \int_S K_{11} \xi_1^m \xi_2^{\lambda_1+n} \times \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ I^{122}_{mn} = \int_S K_{12} \xi_1^m \xi_2^{\lambda_1+n} \times \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ I^{212}_{mn} = \int_S K_{21} \xi_1^m \xi_2^{\lambda_2+n} \times \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ I^{222}_{mn} = \int_S K_{22} \xi_1^m \xi_2^{\lambda_2+n} \times \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \end{cases} \quad (4.5)$$

$I^{\alpha\beta 2}_{mn}$ 可用直接用数值积分计算, $I^{\alpha\beta 1}_{mn}$ 需先按照 *Taylor* 积分及其特征展开特性、通过有限部积分, 化为 *Cauchy* 主值意义下的积分:

$$I^{\alpha\beta 1}_{mn} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{D_0^{\alpha\beta}(x_1, x_2)}{R(\theta_1)} \mathcal{G}_{\alpha\beta} + D_1^{\alpha\beta}(x_1, x_2, \theta_1) \ln R(\theta_1) \mathcal{G}_{\alpha\beta} + \int_0^{R(\theta_1)} D_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, r_1, \theta_1) \mathcal{G}_{\alpha\beta} dr_1 \right) d\theta \quad (4.6)$$

再应用有限部积分原理, 才可以进行通常意义下数值处理。求解出方程组系数 $I^{\alpha\beta}_{mn}$, 把所得结果代入方程组中, 便可计算出裂纹尖端附近 ξ_0 点处应力强度因子表达式:

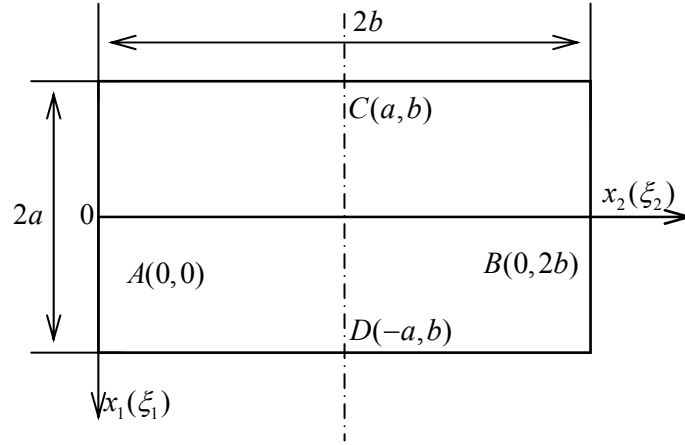


图 4.1 裂纹面示意图

4.3 应力强度因子

图 4.1 为裂纹表面示意图， A ， B ， C ， D 为四个特征点。把方程组(4.3)所求结果代入把公式(3.46)–(3.49)便可计算出裂纹尖端附近 ξ_0 点处应力强度因子的表达式：

$$\begin{cases} K_{II, \lambda_1} = \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{2^{1-\lambda_1} \lambda_1 \mu_1 (2 - (1-2\lambda_1)A - (1+2\lambda_1)B) \tilde{u}_2}{(k_1 + 1) \sin \lambda_1 \pi} \times \sqrt{2b(a^2 - x_1^2)} F_1(x_1, 0) \\ K_{III, \lambda_2} = \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{2^{1-\lambda_2} \lambda_2 \mu_1 \mu_2 (2 - (1-2\lambda_2)A - (1+2\lambda_2)B) \tilde{u}_1}{(\mu_1 + \mu_2) \sin \lambda_2 \pi} \times \sqrt{2b(a^2 - x_1^2)} F_2(x_1, 0) \end{cases} \quad (4.7)$$

以 τ_{xz}^∞ 作用下剪切型三维矩形裂纹为例，应力强度因子无量纲化后可表示为：

$$\begin{cases} F_{II, \lambda_1} = K_{II, \lambda_1} / \sigma_{23}^\infty b^{1-\lambda_1} \\ F_{III, \lambda_2} = K_{III, \lambda_2} / \sigma_{13}^\infty b^{1-\lambda_2} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} F_{II} = K_{II} / \sigma_{23}^\infty \sqrt{b} \\ F_{III} = K_{III} / \sigma_{13}^\infty \sqrt{b} \end{cases} \quad (4.9)$$

其中 F_{II, λ_1} ， F_{III, λ_2} 为裂纹面前端 $x_2 = 0$ 边无量纲应力强度因子表达式； F_{II} ， F_{III} 为裂纹面其余三边无量纲应力强度因子表达式。

4.4 本章小结

本章以反映裂纹前沿应力奇性的密度函数基本解表示位移间断，对超奇异积分方程组的超奇异部分展开，再利用有限部积分理论，计算解耦后的代数方程组，得到应力强度因子的数值方法表达式。

第五章 三维双相材料裂纹问题的数值结果

在前面的分析中，我们对三维双相材料与界面垂直剪切型裂纹问题的超奇异积分方程组进行了理论分析，获得了应力强度因子计算公式。基于这些工作，本章对三维双相材料与界面垂直剪切型裂纹问题中较经典的几种情形进行了数值计算和分析(计算程序是用 *Fortran* 语言编写)，得到应力强度因子随 *Dunder* 参数、裂纹形状比、多项式指数、配置点数及坐标值变化的规律。其中双相材料部分数值结果属于首次报道。

5.1 收敛性及精度

边界元法数值解的误差来源主要是三个方面：离散误差、计算机舍入误差和数值积分误差。离散误差是边界元法所固有的误差，边界上连续变化的函数被边界上有限离散节点的对应数值所代替，原则上增加配置点数可以使离散误差降低，但配置点数增加会使计算机所用机时增加，所以实际最佳效果需要经过验算获得；计算机舍入误差是数值运算中不可避免的，采取适当的计算方法，舍入误差可以控制在较小的范围内；数值积分误差是由于边界元法有大量的积分运算，数值积分误差实际上是截断误差，增加多项式指数可以提高精度，但同样会增加计算机所用机时，因此实际效果也需要经过验算获得。

如无特殊声明，本章中所有算例，配置点数取 400，多项式指数取 9，材料泊松比取 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ，坐标 x_1/a 变化区间取 $[-1, 1]$ ，坐标 x_2/b 变化区间取 $[0, 2]$ ，无穷远处作用载荷 σ_{31}^∞ ，裂纹形状比 a/b 取 1，材料剪切模量比 μ_2/μ_1 为 1。

裂纹表面最小残余应力 $\tau_C = (\tau_{3\alpha}/\tau_{3\alpha}^\infty) + 1$ 随多项式指数规律如图 5.1 所示。最小残余应力随多项式指数增大而减小，数值结果精度随多项式指数增加而增大。

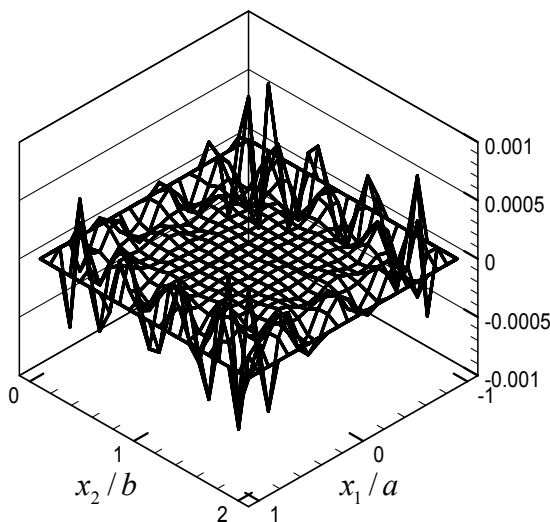


图 5.1a 多项式指数为 9 时最小残余应力变化规律

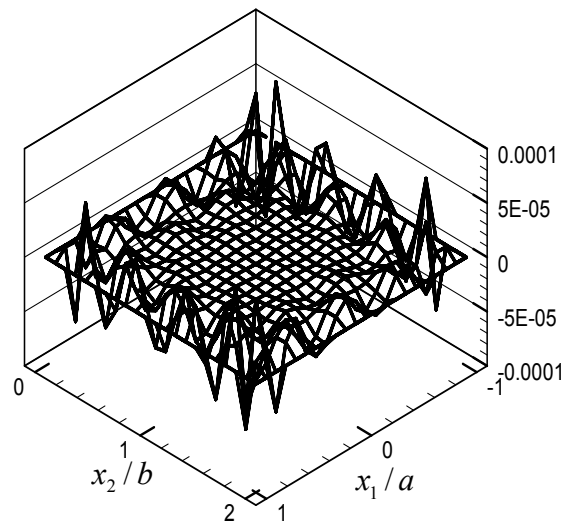


图 5.1b 多项式指数为 11 时最小残余应力变化规律

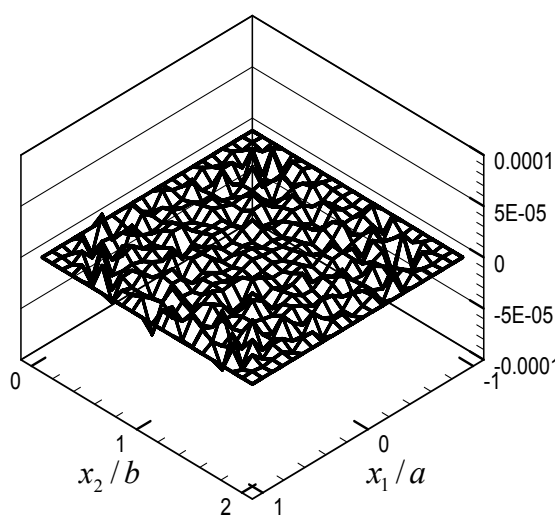


图 5.1c 多项式指数为 12 时最小残余应力变化规律

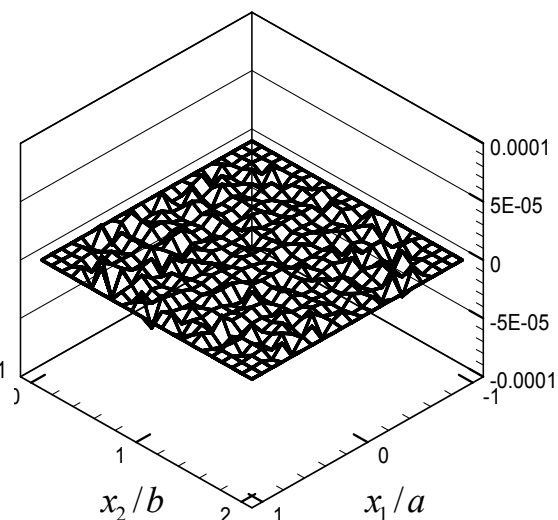


图 5.1d 多项式指数为 13 时最小残余应力变化规律

材料剪切模量比为 2，裂纹表面最小残余应力 $\tau_c = (\tau_{3\alpha} / \tau_{3\alpha}^\infty) + 1$ 随多项式指数规律如图 5.2 所示。其变化规律与图 5.1 相同。

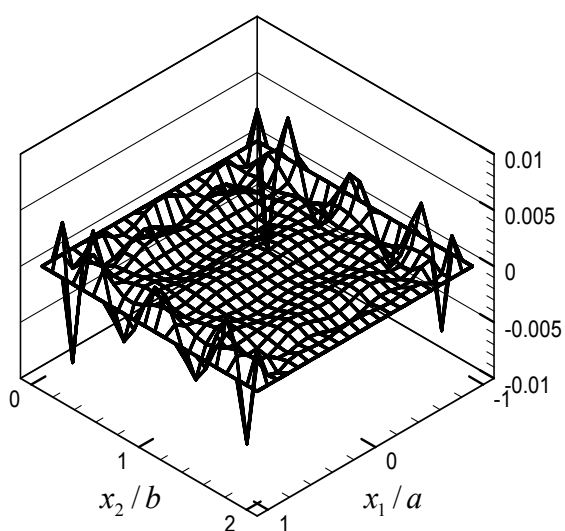


图 5.2a 多项式指数为 7 时最小残余应力变化规律

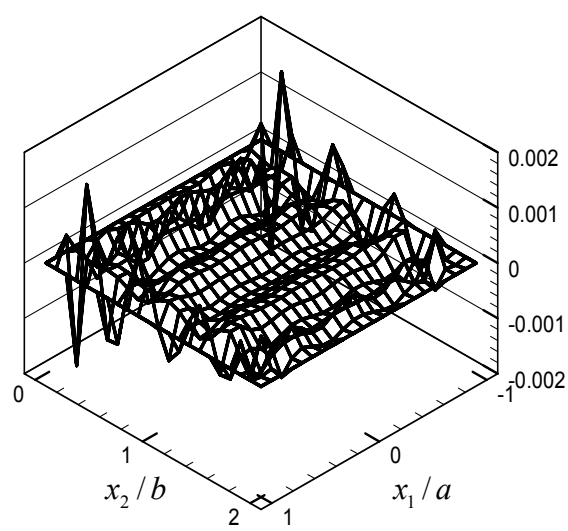


图 5.2b 多项式指数为 8 时最小残余应力变化规律

材料剪切模量比为 2，作用载荷 σ_{32}^∞ 时，裂纹表面最小残余应力 $\tau_C = (\tau_{3a} / \tau_{3a}^\infty) + 1$ 随多项式指数规律如图 5.3 所示。其变化规律与图 5.1 相同。

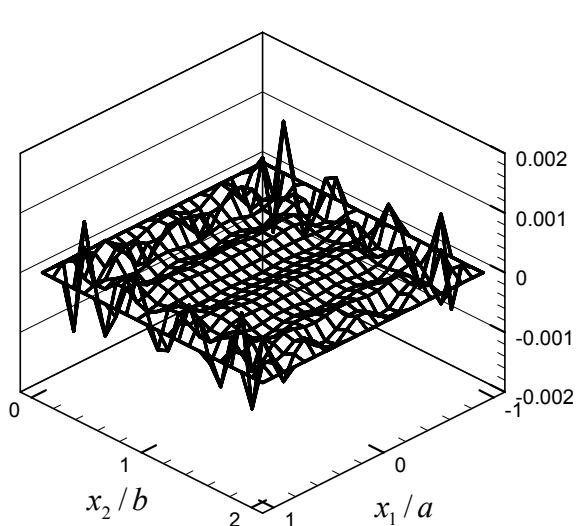


图 5.2c 多项式指数为 9 时最小残余应力变化规律

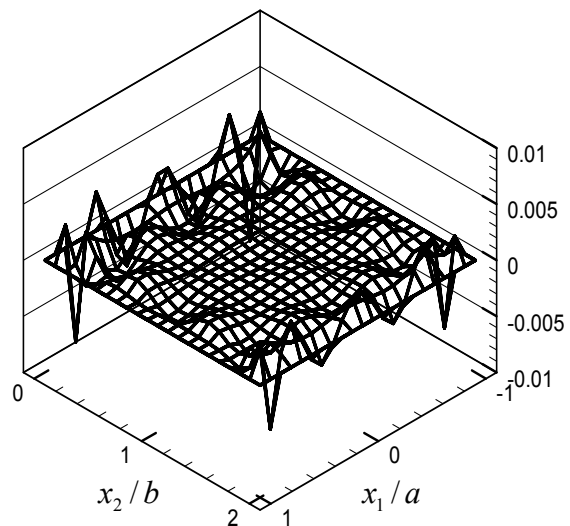


图 5.3a 多项式指数为 7 时最小残余应力变化规律

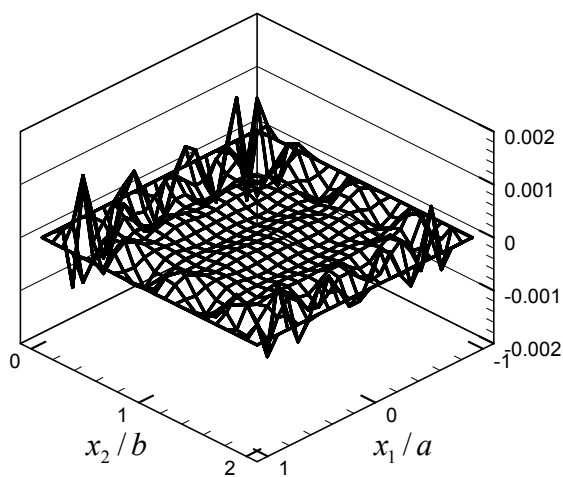


图 5.3b 多项式指数为 8 时最小残余应力变化规律

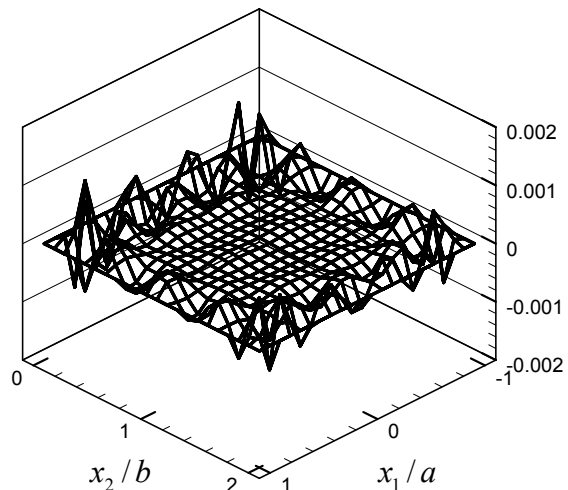


图 5.3c 多项式指数为 9 时最小残余应力变化规律

综上所述：配置点处最小残余应力随多项式指数增加而减小，数值结果精度随多项式指数增加而提高，计算机所需机时随多项式指数增加而增加。在实际应用中，一般取多项式指数等于 9 就能很好的满足精度和收敛性要求了。

应力强度因子 F_{II} 、 F_{III} 随多项式指数变化规律如表 5.1、表 5.2 所示。应力强度因子随着多项式指数增加是收敛的。 F_{II} (C, D 点)与 F_{III} (A, B 点)分别收敛到 0.8412 和 0.6544, 此时的数值结果与文献 Noda^[58]、Chen^[59]中结果比较, 吻合良好。

表 5.1 在 $x_1 = \pm a$ 边应力强度因子 F_{II} 随多项式指数变化规律

x_2/b	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
M=13	0.8412	0.8395	0.8342	0.8250	0.8117	0.7933	0.7688	0.7359	0.6906	0.6267	0.5256
M=12	0.8410	0.8394	0.8343	0.8252	0.8115	0.7931	0.7689	0.7360	0.6904	0.6271	0.5236
M=11	0.8412	0.8394	0.8342	0.8251	0.8117	0.7933	0.7688	0.7356	0.6903	0.6279	0.5276
M=10	0.8412	0.8395	0.8341	0.8250	0.8116	0.7934	0.7689	0.7356	0.6903	0.6281	0.5267
M=9	0.8412	0.8396	0.8339	0.8247	0.8116	0.7936	0.7689	0.7351	0.6903	0.6300	0.5272
M=8	0.8412	0.8396	0.8339	0.8247	0.8116	0.7937	0.7690	0.7352	0.6904	0.6296	0.5259
M=7	0.8398	0.8385	0.8343	0.8262	0.8129	0.7935	0.7672	0.7340	0.6922	0.6334	0.5222
M=6	0.8397	0.8384	0.8343	0.8263	0.8131	0.7937	0.7674	0.7339	0.6918	0.6325	0.5211
Noda	0.8412	0.8391	—	0.8216	—	0.7819	—	0.7062	—	0.5381	—
.Chen ^I	0.8388	0.8375	0.8333	0.8225	0.8122	0.7911	0.7579	0.7056	0.6217	0.4760	—

表 5.2 在 $x_2 = 0, 2b$ 边应力强度因子 F_{III} 随多项式指数变化规律

x_1/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
M=13	0.6544	0.6529	0.6482	0.6401	0.6283	0.6124	0.5913	0.5635	0.5269	0.4777	0.3957
M=12	0.6544	0.6528	0.6482	0.6401	0.6282	0.6122	0.5912	0.5635	0.5268	0.4774	0.3937
M=11	0.6544	0.6528	0.6481	0.6400	0.6283	0.6123	0.5912	0.5636	0.5277	0.4786	0.3949
M=10	0.6544	0.6529	0.6481	0.6399	0.6282	0.6123	0.5912	0.5635	0.5277	0.4788	0.3941
M=9	0.6544	0.6528	0.6481	0.6400	0.6282	0.6122	0.5912	0.5641	0.5287	0.4788	0.3906
M=8	0.6544	0.6528	0.6480	0.6399	0.6282	0.6122	0.5913	0.5643	0.5288	0.4786	0.3899
M=7	0.6540	0.6526	0.6481	0.6402	0.6285	0.6126	0.5918	0.5649	0.5294	0.4770	0.3822
M=6	0.6539	0.6525	0.6481	0.6403	0.6287	0.6128	0.5920	0.5650	0.5292	0.4765	0.3814
Noda	0.6544	0.6525	—	0.6369	—	—	—	—	0.5389	—	—
Chen	0.6638	0.6619	0.6561	0.6457	0.6296	0.6063	0.5728	0.5248	0.4540	0.3406	—

取材料剪切模量比为 1, 多项式指数为 11, 应力强度因子 F_{II} 、 F_{III} 随坐标变化规律如图 5.4、图 5.5 所示。图 5.4 显示, 在 $x_1 = \pm a$ 边, F_{II} 随坐标 x_2/b 呈对称分布, $x_2/b = 1$ 时取最大值。图 5.5 显示, 在 $x_2/b = 0, 2$ 边, F_{III} 随坐标 x_1/a 呈对称分布, $x_1/a = 0$ 时取最大值。

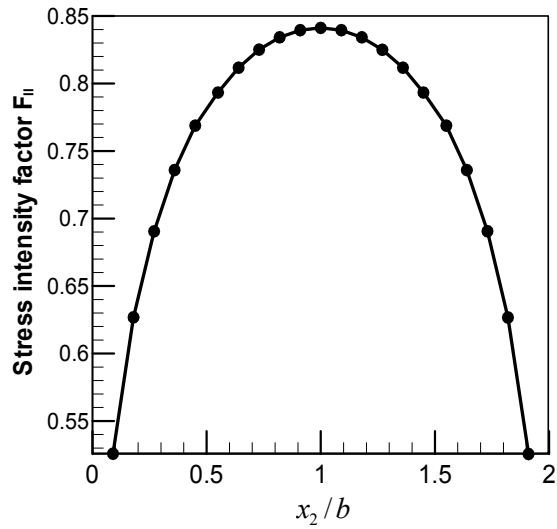


图 5.4 应力强度因子 F_{II} 随 x_2/b 变化规律

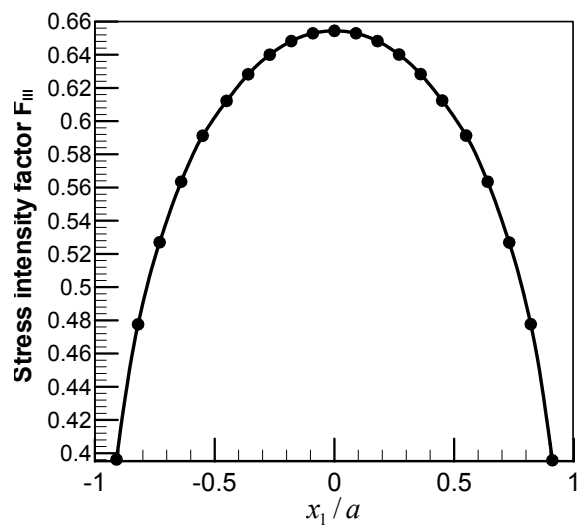


图 5.5 应力强度因子 F_{III} 随坐标 x_1/a 变化规律

取材料剪切模量比 2，作用载荷 σ_{31}^∞ 、 σ_{32}^∞ 时，应力强度因子随多项式指数增加变化规律分别如表 5.3、表 5.4 所示。

取材料剪切模量比 0.5，作用载荷 σ_{31}^∞ 、 σ_{32}^∞ 时，应力强度因子随多项式指数增加变化规律分别如表 5.5、表 5.6 所示。

表中计算结果显示：同时改变材料剪切模量比、作用载荷时，应力强度因子随多项式指数增加收敛，且当多项式指数为 9 时，数值结果已经能很好满足精度要求。对于裂纹形状比、材料剪切模量比、作用载荷、配置点数同时变化情况下，应力强度因子随多项式指数增加收敛情况，见后面的分析。

表 5.3a: 在 $x_2 = 0$ 边应力强度因子 F_{III} 随多项式指数变化规律

x_1/a	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91
M=9	1.1889	1.1865	1.1789	1.1663	1.1485	1.1239	1.0916	1.0487	0.9933	0.9152	0.7692
M=8	1.1874	1.1850	1.1775	1.1648	1.1468	1.1222	1.0899	1.0475	0.9920	0.9130	0.7638
M=7	1.1843	1.1821	1.1758	1.1638	1.1461	1.1210	1.0879	1.0458	0.9908	0.9079	0.7448
M=6	1.1816	1.1797	1.1731	1.1614	1.1436	1.1186	1.0857	1.0434	0.9872	0.9023	0.7373

表 5.3b: 在 $x_2 = 2b$ 边应力强度因子 F_{III} 随多项式指数规律

x_1 / a	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91
M=9	0.6437	0.6422	0.6296	0.5549	0.6375	0.6180	0.6024	0.5817	0.5201	0.4711	0.3841
M=8	0.6447	0.6431	0.6303	0.5563	0.6383	0.6189	0.6033	0.5829	0.5213	0.4723	0.3857
M=7	0.6431	0.6418	0.6294	0.5557	0.6373	0.6180	0.6024	0.5820	0.5206	0.4690	0.3753
M=6	0.6444	0.6430	0.6312	0.5572	0.6388	0.6199	0.6043	0.5836	0.5222	0.4711	0.3783

表 5.4a: 在 $x_2 = 0$ 边应力强度因子 F_{II} 随多项式指数变化规律

x_1 / a	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91
M=9	1.2470	1.2440	1.2360	1.2250	1.2100	1.1890	1.1590	1.1170	1.0630	0.9965	0.8779
M=8	1.2470	1.2440	1.2370	1.2260	1.2100	1.1890	1.1590	1.1180	1.0650	0.9979	0.8768
M=7	1.2430	1.2420	1.2390	1.2300	1.2140	1.1900	1.1560	1.1160	1.0700	1.0080	0.8689
M=6	1.2440	1.2430	1.2400	1.2310	1.2160	1.1910	1.1580	1.1180	1.0720	1.0090	0.8673

表 4b: 在 $x_2 = 2b$ 应力强度因子 F_{II} 随多项式指数变化规律

x_1 / a	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91
M=9	0.8219	0.8201	0.8147	0.8059	0.7934	0.7761	0.7522	0.7198	0.6767	0.6185	0.5180
M=8	0.8217	0.8198	0.8143	0.8054	0.7930	0.7759	0.7522	0.7195	0.6755	0.6160	0.5155
M=7	0.8204	0.8192	0.8151	0.8073	0.7946	0.7760	0.7510	0.7193	0.6791	0.6219	0.5130
M=6	0.8195	0.8183	0.8146	0.8071	0.7946	0.7757	0.7500	0.7172	0.6761	0.6189	0.5113

表 5.5a: 在 $x_2 = 0$ 边应力强度因子 F_{III} 随多项式指数变化规律

x_1 / a	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91
M=9	0.3534	0.3525	0.3496	0.3445	0.3372	0.3272	0.3143	0.2978	0.2764	0.2463	0.1954
M=8	0.3536	0.3527	0.3497	0.3447	0.3374	0.3275	0.3146	0.2982	0.2767	0.2466	0.1958
M=7	0.3538	0.3529	0.3499	0.3449	0.3377	0.3279	0.3153	0.2990	0.2773	0.2460	0.1925
M=6	0.3540	0.3531	0.3502	0.3454	0.3382	0.3285	0.3158	0.2995	0.2777	0.2465	0.1933

表 5.5b: 在 $x_2 = 2b$ 应力强度因子 F_{III} 随多项式指数变化规律

x_1 / a	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91
M=9	0.6591	0.6575	0.6527	0.6445	0.6327	0.6167	0.5955	0.5682	0.5324	0.4822	0.3936
M=8	0.6589	0.6573	0.6525	0.6443	0.6325	0.6164	0.5953	0.5681	0.5324	0.4817	0.3917
M=7	0.6587	0.6573	0.6528	0.6449	0.6332	0.6172	0.5961	0.5691	0.5333	0.4806	0.3853
M=6	0.6584	0.6569	0.6524	0.6445	0.6328	0.6168	0.5959	0.5688	0.5326	0.4789	0.3823

表 5.6a: 在 $x_2 = 0$ 边应力强度因子 F_{II} 随多项式指数变化规律

x_1 / a	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91
M=9	0.5402	0.5388	0.5347	0.5278	0.5178	0.5040	0.4854	0.4604	0.4268	0.3793	0.3010
M=8	0.5401	0.5387	0.5345	0.5276	0.5176	0.5039	0.4854	0.4603	0.4262	0.3782	0.2999
M=7	0.5393	0.5381	0.5344	0.5277	0.5177	0.5035	0.4845	0.4596	0.4264	0.3790	0.2983
M=6	0.5388	0.5377	0.5341	0.5276	0.5176	0.5033	0.4840	0.4586	0.4250	0.3775	0.2976

表 5.6b: 在 $x_2 = 2b$ 应力强度因子 F_{II} 随多项式指数变化规律

x_1 / a	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91
M=9	0.8663	0.8642	0.8581	0.8483	0.8345	0.8158	0.7899	0.7546	0.7077	0.6447	0.5388
M=8	0.8664	0.8644	0.8584	0.8486	0.8348	0.8158	0.7899	0.7550	0.7088	0.6464	0.5393
M=7	0.8642	0.8628	0.8585	0.8500	0.8361	0.8156	0.7879	0.7529	0.7090	0.6479	0.5338
M=6	0.8648	0.8634	0.8588	0.8501	0.8362	0.8160	0.7889	0.7546	0.7111	0.6495	0.5338

材料剪切模量比分别取 0.001, 100 时, 应力强度因子随多项式指数变化规律如表 5.7 所示。应力强度因子在特征点(A, B, C, D)处随多项式指数的增加而收敛。

表 5.7 应力强度因子随多项指数变化规律

	$\mu_2 / \mu_1 = 0.001$			$\mu_2 / \mu_1 = 100$		
	$F_{III, \lambda_2} x_2 = 0$	$F_{III, \lambda_2} x_2 = 2b$	$F_{II, \lambda_2} x_1 = \pm a$	$F_{III, \lambda_2} x_2 = 0$	$F_{III, \lambda_2} x_2 = 2b$	$F_{II, \lambda_2} x_1 = \pm a$
M=N=9	0.00064	0.6611	0.9025	5.5860	0.6302	0.8083
M=N=8	0.00064	0.6610	0.9026	5.5861	0.6302	0.8082
M=N=7	0.00064	0.6611	0.9008	5.5860	0.6301	0.8078
M=N=6	0.00064	0.6613	0.9004	5.5863	0.6304	0.8076

5.2 表面裂纹情况

材料剪切模量比为 0 时, 三维双相材料裂纹问题退化为三维表面裂纹情形。此时应力强度因子随裂纹形状比变化规律如表 5.8、表 5.9 所示。随着裂纹形状比增加, 三维表面裂纹应力强度因子的数值结果逐渐接近平面表面裂纹应力强度因子数值结果。

表 5.8 显示: 在 B 点 F_{III} 随裂纹形状比增大而增大, 增大梯度递减至零, 当 $a/b \geq 8$ 时, 已接近表面平面裂纹情形了。与文献 Westergaard^[57], Tada^[58]比较, 结果吻合良好。

表 5.9 显示: 在 C 、 D 点 F_{II} 随裂纹形状变化规律与表 5.8 相同。与文献 Xiao^[59], Traceyl^[60]比较, 结果吻合良好

表 5.8 在 B 点应力强度因子 F_{III} 随裂纹形状比变化规律

1	2	5	8	12	Westergaard ^[57] Tada ^[58]
0.6615	0.8645	1.147	1.385	1.410	1.414

表 5.9 在 C、D 点应力强度因子 F_{II} 随裂纹形状比变化规律

1	2	5	8	Xiao ^[59]	Tracey ^[60]
0.9703	1.255	1.480	1.542	1.539	1.542

取材料剪切模量比为 0，作用载荷 σ_{31}^∞ 、 σ_{32}^∞ 时，在 $x_2 = 2b$ 边，应力强度因子随裂纹形状比及坐标 x_1/a 变化规律分别如图 5.6、图 5.7 所示。应力强度因子随着裂纹形状比的增加而增加，增加梯度递减至零，应力强度因子随 x_1/a 呈对称分布变化， $x_1/a = 0$ 时取最大值。

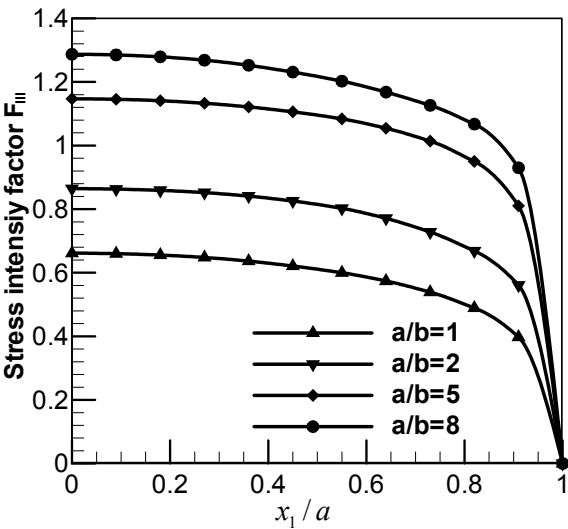


图 5.6 应力强度因子 F_{III} 随 x_1/a 变化规律

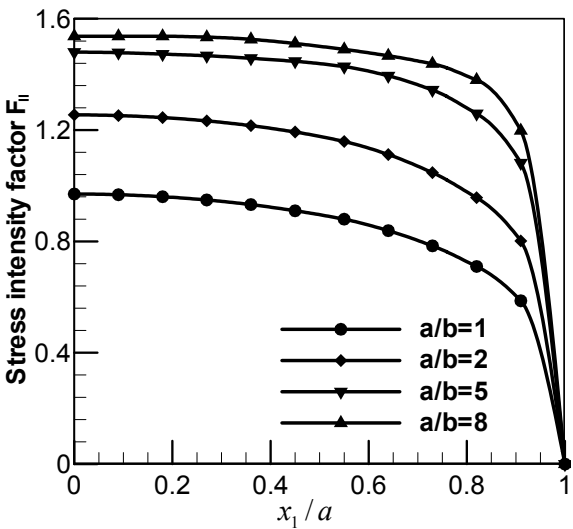


图 5.7 应力强度因子 F_{II} 随坐标 x_1/a 变化规律

材料剪切模量比为 0，作用载荷 σ_{31}^∞ 、 σ_{32}^∞ 时，在 B 点，应力强度因子随裂纹形状比变化规律分别如图 5.8、图 5.9 所示。应力强度因子随着裂纹形状比的增加而增加，增加梯度递减至零，增加梯度递减至零，当 $a/b \geq 8$ 时，已经和二维平面表面裂纹情况结果十分吻合了

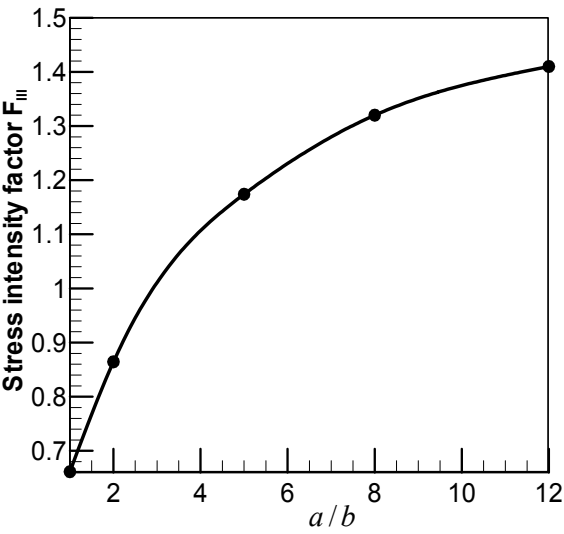


图 5.8 应力强度因子 F_{III} 随裂纹形状比变化规律

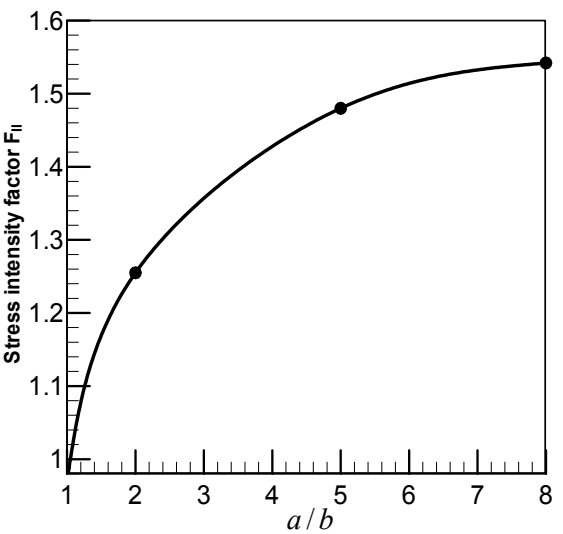


图 5.9 应力强度因子 F_{II} 随裂纹形状比变化规律

5.3 裂纹形状变化

应力强度因子随裂纹形状比变化规律如表 5.10、5.11 所示。表中数据显示：随裂纹形状比增大，应力强度因子逐渐增大，增加梯度递减至零；当 $a/b \geq 8$ 时，已接近均质材料平面裂纹情形。

表 5.10 在 $x_2 = 0, 2b$ 边应力强度因子 F_{II} 随裂纹形状比变化规律

x_2/b	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
a/b=1	0.8412	0.8396	0.8339	0.8247	0.8116	0.7936	0.7689	0.7351	0.6903	0.6300	0.5272
a/b=2	0.9307	0.9285	0.9218	0.9104	0.8940	0.8720	0.8435	0.8069	0.7584	0.6672	0.5570
a/b=5	0.9631	0.9611	0.9550	0.9443	0.9285	0.9061	0.8749	0.8312	0.7682	0.6729	0.5633
a/b=8	0.9797	0.9772	0.9694	0.9558	0.9390	0.9176	0.8864	0.8427	0.7797	0.6834	0.5748

表 5.11 在 $x_1 = \pm a$ 边应力强度因子 F_{III} 随裂纹形状比变化规律

x_1/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
a/b=1	0.6544	0.6528	0.6481	0.6400	0.6282	0.6122	0.5912	0.5641	0.5287	0.4788	0.3906
a/b=2	0.8399	0.8379	0.8319	0.8223	0.8088	0.7904	0.7651	0.7305	0.6843	0.6215	0.5160
a/b=5	0.9715	0.9704	0.9671	0.9622	0.9552	0.9449	0.9283	0.9016	0.8606	0.7971	0.6738
a/b=8	0.9907	0.9901	0.9884	0.9861	0.9832	0.9787	0.9701	0.9539	0.9256	0.8751	0.7565

在 $x_1 = \pm a$ 边，应力强度因子 F_{II} 随裂纹形状比及坐标值 x_2/b 变化曲线如图 5.10 所示： F_{II} 随

裂纹形状比增加而增大，增大梯度递减至零，当 $a/b \geq 8$ 时，数值结果已和二维平面裂纹情况十分吻合了。 F_{II} 随坐标 x_2/b 呈对称分布， $x_2/b = 1$ 时取极大值。

在 $x_1 = 0, 2b$ 边，应力强度因子 F_{III} 随裂纹形状比及坐标值 x_1/a 变化曲线如图 5.11 所示： F_{III} 随裂纹形状比增加而增大，增大梯度递减至零，当 $a/b \geq 8$ 时，数值结果已和二维平面裂纹情况十分吻合了。 F_{III} 随坐标 x_1/a 呈对称分布， $x_1/a = 0$ 时取极大值。

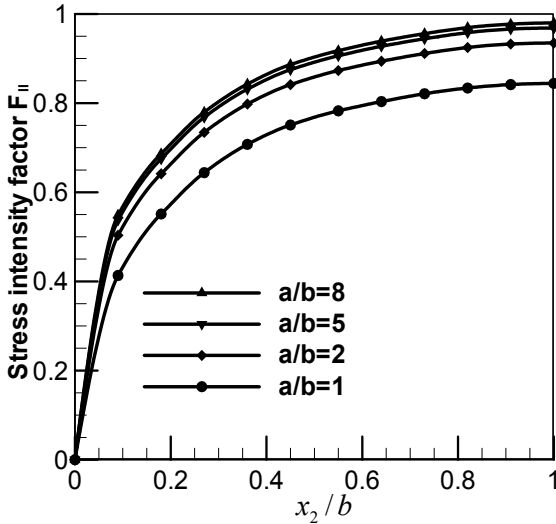


图 5.10 应力强度因子 F_{II} 随坐标变化规律

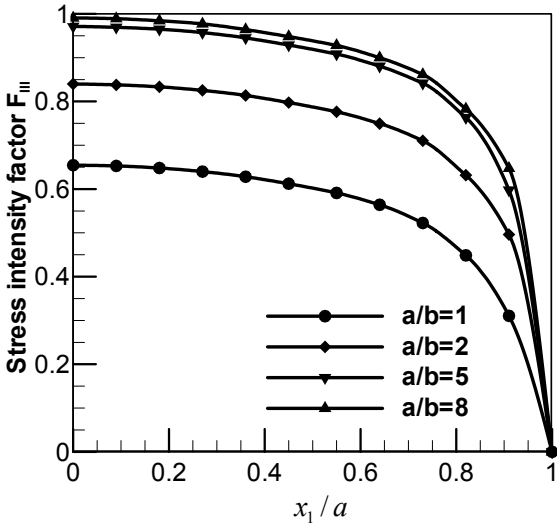


图 5.11 应力强度因子 F_{III} 随坐标变化规律

5.4 不同材料情况

材料剪切模量比为 1，复合材料裂纹退化为均质材料裂纹，本文的计算结果与其他的文献比较见表 5.12。表 5.12 显示：应力强度因子 F_{II} 在 $C、D$ 点取最大值，应力强度因子 F_{III} 在 $A、B$ 点取最大值。此时计算结果与 Noda^[55]、Chen^[56]、Kassir^[66] 文献中结果吻合良好

表 5.12 应力强度因子计算结果与均质材料三维裂纹结果比较

	Present	Noda ^[55]	Chen ^[56]	Kassir ^[66]
$F_{II\max}$	0.8415	0.841	0.8388	0.831
$F_{III\max}$	0.6544	0.654	0.6638	—

在 $x_2 = 0$ 边，应力强度因子随材料剪切模量比变化曲线如图 5.12 所示： F_{III} 在 A 点随剪切模量比增加而增加，增加梯度递减至零，当 $\mu_2/\mu_1 \geq 20$ 时，结果已趋于固定值。

在 $x_2 = 2b$ 边, 应力强度因子随材料剪切模量比变化曲线如图 5.13 所示: F_{III} 在 B 点随材料剪切模量比增加而减小, 减小梯度递减至零, 当 $\mu_2 / \mu_1 \geq 20$ 已趋于固定值。

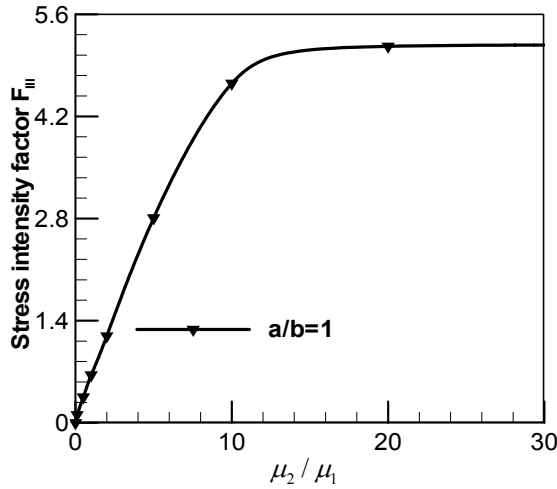


图 5.12 应力强度因子 F_{III} 随剪切模量比变化规律

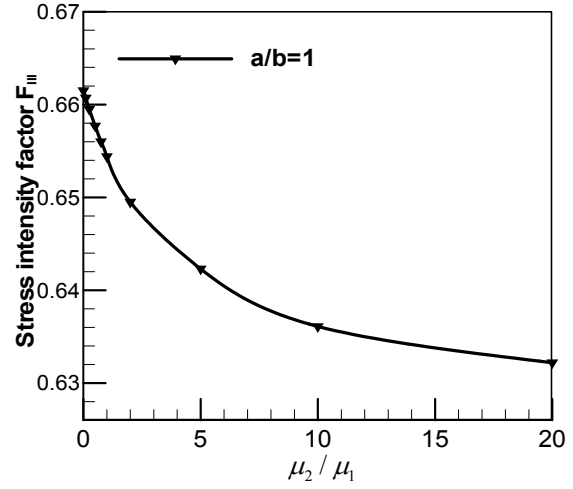


图 5.13 应力强度因子 F_{III} 随剪切模量比变化规律

$x_1 = \pm a$ 边, 应力强度因子 F_{II} 随材料剪切模量比及坐标值变化曲线如图 5.14 所示: 在区域 $(0,1)$ 内 F_{II} 随坐标 x_2 / b 增加而增加; F_{II} 在 $[0,1]$ 内 F_{II} 随坐标 x_2 / b 增加而增加, 在 $[1,2]$ 随坐标 x_2 / b 增大而减小; F_{II} 随材料剪切模量比增加而减小, 减小梯度递减至零, 当 $\mu_2 / \mu_1 \geq 20$ 时, 结果已趋于固定值。

$x_1 = \pm a$ 边, 应力强度因子随材料剪切模量比变化曲线如图 5.15 所示: 在点 C 、 D 点 F_{II} 随材料剪切模量比变化规律与图 5.13 相同。

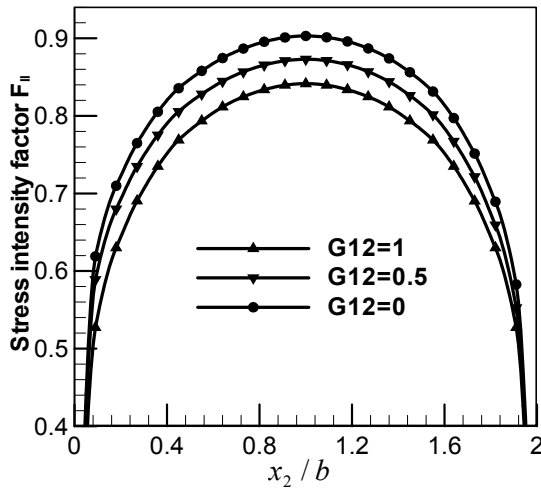


图 5.14 应力强度因子 F_{II} 随坐标变化规律

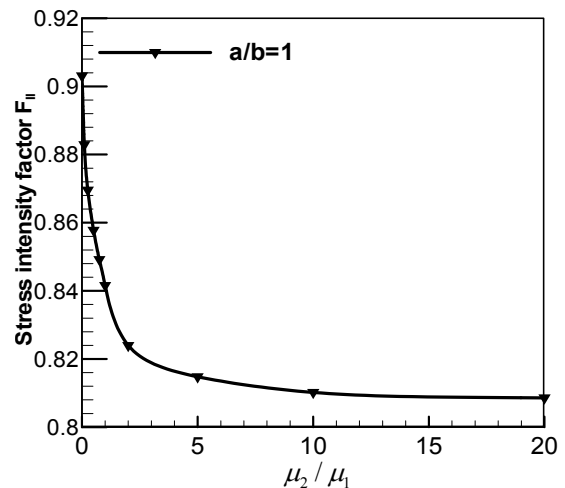


图 5.15 应力强度因子 F_{II} 随剪切模量比变化规律

综上所述, 同时或单独改变裂纹形状比、多项式指数时, 应力强度因子随材料剪切模量比变化规律为: 作用载荷 σ_{31}^∞ 时, 在 $x_2 = 0$ 边 F_{III} 随材料剪切模量比增加而增加, 增加梯度递减至零, $\mu_2 / \mu_1 = 0$ 时, 取极小值 0, 当 $\mu_2 / \mu_1 \geq 20$ 时, 已趋于固定值; 在 $x_2 = 2b$ 边, F_{III} 随材料剪切

模量比增加而减小,减小梯度递减至零, $\mu_2/\mu_1 = 0$ 时,取极大值,当 $\mu_2/\mu_1 \geq 20$ 时,已趋于固定值;在 $x_1 = \pm a$ 边, F_{II} 变化规律与 F_{III} ($x_2 = 2b$ 边)变化规律相同。作用载荷 σ_{32}^∞ 时有类似规律。

5.5 一般情况

同时改变裂纹形状比、材料剪切模量比、多项式指数、坐标值时,可以得到应力强度因子变化的一般规律。

取多项式指数为 11,应力强度因子 F_{II} 在 C 、 D 点随材料剪切模量比及裂纹形状比变化曲线如图 5.16 所示: F_{II} 随材料剪切模量比增加而减少,减小梯度递减至零,当 $\mu_2/\mu_1 \geq 20$ 时, F_{II} 已趋近于固定值; F_{II} 随裂纹形状比增加而增大,增大梯度递减至零,当 $a/b \geq 8$ 时, F_{II} 已趋近于平面问题结果。

取多项式指数为 11,应力强度因子 F_{III} 在 B 点随材料剪切模量比及裂纹形状比变化曲线如图 5.17 所示: F_{III} 随剪切模量比、裂纹形状比变化规律与图 5.16 相同。

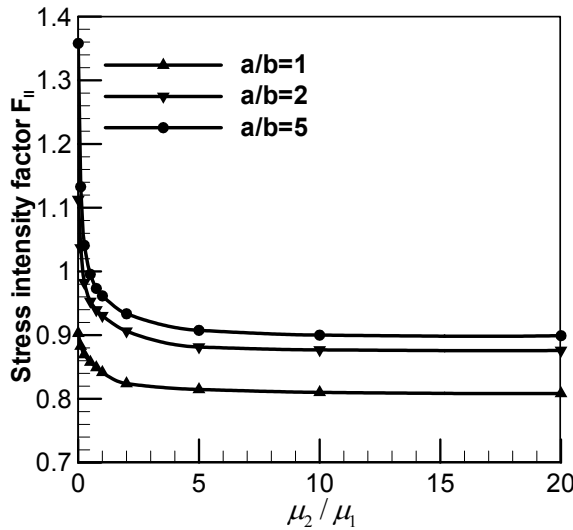


图 5.16 F_{II} 随剪切模量比、裂纹形状比变化规律曲线

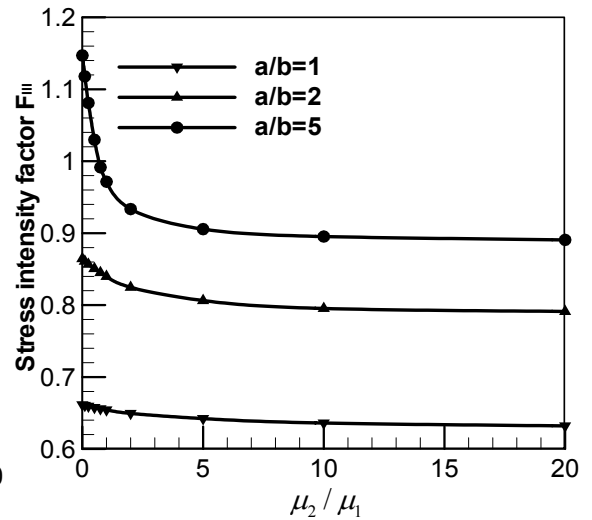


图 5.17 F_{III} 随剪切模量比、裂纹形状比变化规律曲线

取多项式指数为 11,应力强度因子 F_{III} 在 A 点处的值随剪切模量比及裂纹形状比变化曲线如图 5.18 所示: F_{III} 随材料剪切模量比增加而增大,增大梯度递减至零,当 $\mu_2/\mu_1 \geq 20$ 时, F_{III} 已趋近于固定值; F_{III} 随裂纹形状比增加而增大,增大梯度递减至零,当 $a/b \geq 8$ 时, F_{III} 已趋近

于平面问题结果。

取材料剪切模量比为 10，多项式指数为 11，应力强度因子 F_{III} 在 $x_2 = 0$ 边随裂纹形状比及坐标 x_1/a 变化曲线如图 5.19 所示： F_{III} 随裂纹形状比增加而增大，增加梯度递减至零，当 $a/b \geq 8$ 时， F_{III} 已趋近于平面问题结果； F_{III} 随 x_1/a 呈对称变化， $x_1/a = 0$ 取最大值。

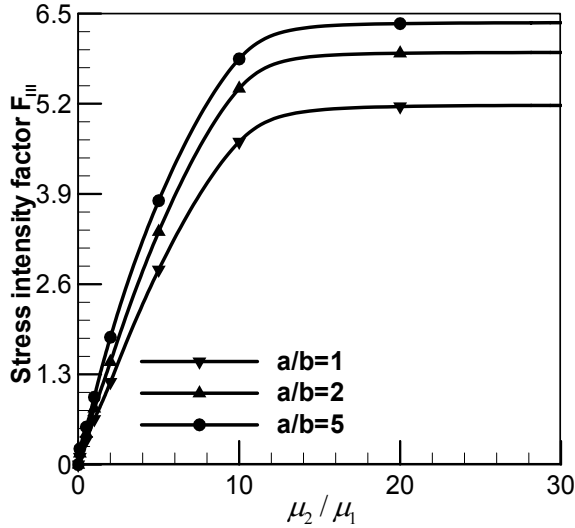


图 5.18 F_{III} 随剪切模量比、裂纹形状比变化规律曲线

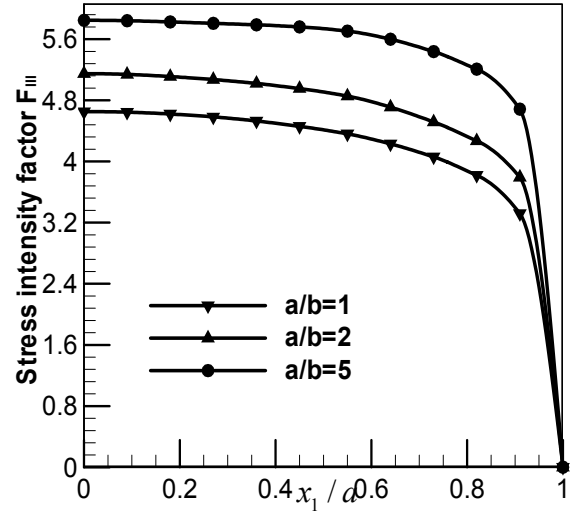


图 5.19 F_{III} 随 x_1/a 、裂纹形状比变化规律曲线

取材料剪切模量比为 10，多项式指数为 11， F_{III} 在 $x_2 = 2b$ 边随裂纹形状比及坐标 x_1/a 变化曲线如图 5.20 所示。 F_{III} 随裂纹形状比、坐标 x_1/a 变化规律与图 5.19 相同。

取材料剪切模量比为 10，多项式指数为 11， F_{II} 在 $x_1 = \pm a$ 边随裂纹形状比及坐标 x_2/b 变化曲线如图 5.21 所示： F_{II} 随裂纹形状比增加而增大，增大梯度递减至零，当 $a/b \geq 8$ 时， F_{II} 已趋近于平面问题结果。在 $[0,1]$ 范围内，随坐标 x_2/b 增大而增大；在 $[1,2]$ 范围内，随坐标 x_2/b 增大而减小。

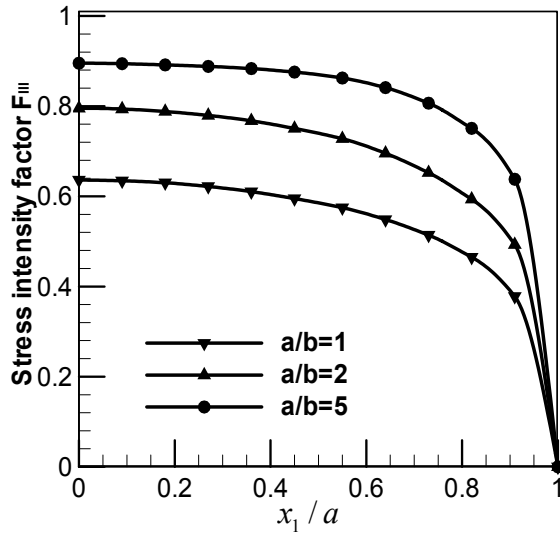


图 5.20 F_{III} 随 x_1/a 、裂纹形状比变化规律曲线

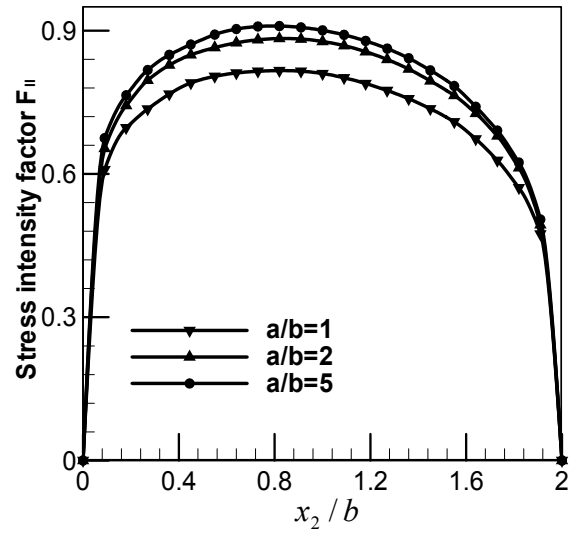


图 5.21 F_{II} 随 x_2/b 、裂纹形状比变化规律曲线

取材料剪切模量比为 2，多项式指数为 11，作用载荷 σ_{32}^∞ 时，应力强度因子 F_{II} 在 $x_2 = 0$ 边值随裂纹形状比及坐标 x_1/a 变化曲线如图 5.22 所示： F_{II} 随裂纹形状比增大而增加，增加梯度递减至零，当裂纹形状比 $a/b \geq 8$ 时， F_{II} 已趋近于平面问题结果。 F_{II} 随坐标 x_1/a 呈对称分布， $x_1/a = 0$ 时取最大值。

取材料剪切模量比为 2，多项式指数为 11，作用载荷 σ_{32}^∞ 时，应力强度因子 F_{II} 在 $x_2 = 2b$ 边值随裂纹形状比及坐标 x_1/a 变化曲线如图 5.23 所示： F_{II} 随裂纹形状比、坐标 x_1/a 变化规律与图 5.22 相同。

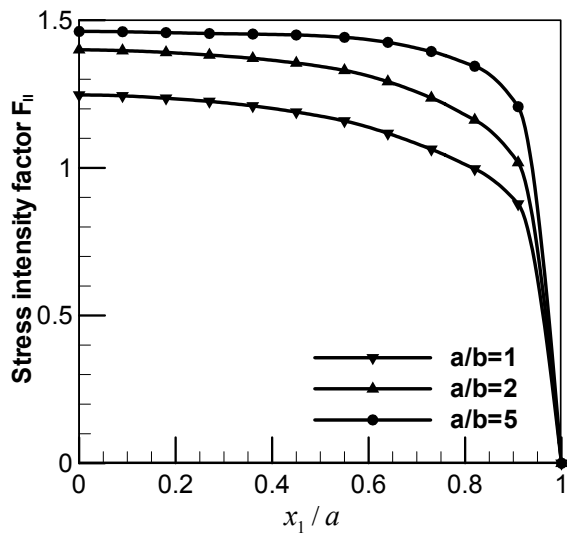


图 5.22 F_{II} 随 x_1/a 、裂纹形状比变化规律曲线

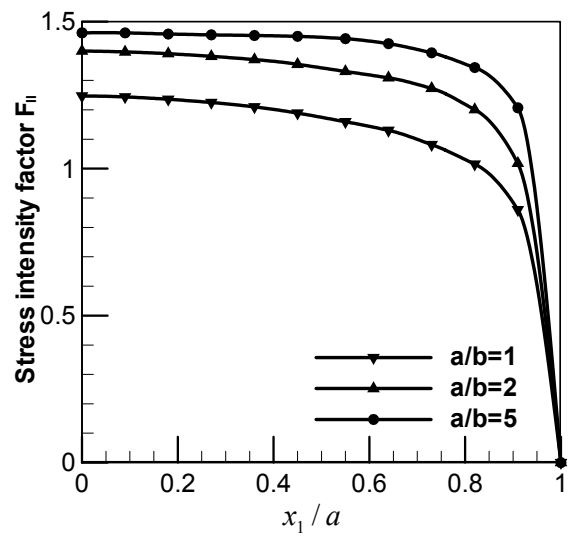


图 5.23 F_{II} 随 x_1/a 、裂纹形状比变化规律曲线

取材料剪切模量比为 2，多项式指数为 11，作用载荷 σ_{32}^∞ 时，应力强度因子 F_{III} 在 $x_1 = \pm a$ 边值随裂纹形状比及坐标 x_2/b 变化曲线如图 5.24 所示： F_{III} 随裂纹形状比、坐标 x_2/b 变化规律与图 5.21 相同。

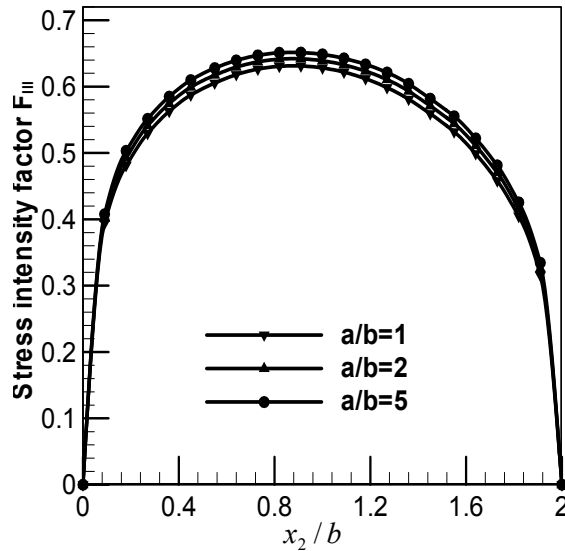


图 5.24 F_{III} 随 x_1/a 、裂纹形状比变化规律曲线

5.6 本章小结

本章对与三维双相材料与界面垂直剪切型裂纹问题中较典型的几种裂纹问题作了计算。分析了应力强度因子数值结果收敛性、精度，得到了应力强度因子随各参数的变化规律。

1. 单独和同时改变材料剪切模量比、裂纹形状比、多项式指数、配置点数、坐标值时，数值结果均能很好的满足收敛性及精度要求，且收敛速度大大优于普通边界元数值方法。通过和三维均质材料裂纹、表面裂纹等已有数值结果比较，数值结果均吻合良好。配置点处最小残余应力大小随多项式指数增加而减小，数值结果精度随多项式指数增加而提高，计算机所需机时随多项式指数增加而增加，因此，实际计算中，一般取多项式指数为 9 就能很好的满足精度和经济性要求了。

2. 材料剪切模量比为 0 时，单独和同时改变多项式指数、配置点数时，得到的表面裂纹结果随裂纹形状比增加而增加，增加梯度递降至零，当 $a/b \geq 8$ 时应力强度因子结果已接近二维表面

裂纹数值结果。

3. 单独和同时改变裂纹形状比、多项式指数、配置点数、材料剪切模量比、坐标值时，得到不同材质的三维双相材料裂纹问题应力强度因子数值结果：作用载荷 σ_{31}^∞ 时，在 $x_2 = 0$ 边，应力强度因子 F_{III} 随材料剪切模量比增加而增加，增加梯度递降至零，在 $\mu_2 / \mu_1 = 0$ 时，取极小值 0，在 $\mu_2 / \mu_1 \geq 20$ 时，已趋于固定值；在 $x_2 = 2b$ 边，应力强度因子 F_{III} 随材料剪切模量比增加而减小，减小梯度递降至零，在 $\mu_2 / \mu_1 = 0$ 时，取极大值，在 $\mu_2 / \mu_1 \geq 20$ 时，已趋于固定值；在 $x_1 = \pm a$ 边，应力强度因子 F_{II} 变化规律相同，随材料剪切模量比增加而减小，减小梯度递降至零，在 $\mu_2 / \mu_1 = 0$ 时，取极大值，在 $\mu_2 / \mu_1 \geq 20$ 时，已趋于固定值。作用载荷 σ_{32}^∞ 时有类似规律。

4. 对于三维双相材料裂纹问题一般情形，可以得到：

应力强度因子随裂纹形状比增加而增加，增加梯度递降至零，当 $a/b \geq 8$ 时已接近二维双相复合材料裂纹数值结果。

在 $x_2 = 0$ 边，应力强度因子随材料剪切模量比增加而增加，增加梯度递降至零， $\mu_2 / \mu_1 = 0$ 时，取极小值 0， $\mu_2 / \mu_1 \geq 20$ 时，已趋于固定值。在 $x_2 = 2b$ 、 $x_1 = \pm a$ 边，应力强度因子随材料剪切模量比增加而减小，减小梯度递降至零。

作用载荷 σ_{31}^∞ 时，在 $x_2 = 0, 2b$ 边 F_{II} 为零，作用载荷 σ_{32}^∞ 时，在 $x_1 = \pm a$ 边 F_{III} 为零。

应力强度因子随多项式指数增加，精度增加，随配置点数增加，精度增加。

同时或单独改变材料剪切模量比、裂纹形状比，多项式指数、配置点数等参数时，应力强度因子随坐标值变化规律为：在 $x_2 = 0, 2b$ 边，随坐标 x_1 / a 呈对称分布。在 $x_1 = \pm a$ 边，当 $\mu_2 / \mu_1 = 1$ ，随坐标 x_2 / b 呈对称分布。

第六章 总结与讨论

6.1 总结

1. 本文在 $Qin^{[4,5]}$ 研究工作的基础上, 对已有复合材料空间位移基本解资料进行整理, 应用调和函数的镜像法, 把两种材料各自满足 $lame' - navier$ 平衡方程的 $Papkovitch - Neuber$ 通解及 $Kelvin$ 特解, 代入广义 $Hooke$ 定律及界面处的位移边界条件中, 得出在空间内部作用有集中力的弹性力学空间位移基本解。再根据广义 $Hooke$ 定律、边界条件, 推导出位移基本解对应的面力基本解。对得出的基本解, 应用 $Cartesian$ 坐标系下的张量变换规则, 推导出三维双相材料与界面垂直坐标系下的空间位移、面力基本解; 进而推导出三维双相材料与界面斜交坐标系下的空间位移、面力基本解。

2. 利用求得的三维双相材料弹性力学问题基本解, 使用 $Somigliana$ 公式, 得出三维双相材料与界面垂直坐标系下应力场积分核函数 S_{kij} 表达式。进而得出三维双相材料与界面斜交坐标系下应力场积分核函数 S_{kij} 表达式。

3. 根据超奇异积分原理和单片裂纹基本解, 对三维双相材料与界面垂直裂纹问题及与界面斜交裂纹问题进行了理论分析, 把这两种裂纹问题各自归结为求解一超奇异积分方程组问题。其中三维双相材料与界面斜交裂纹问题的研究属于首次报道。

4. 本文把 $Qin^{[4,5]}$ 中数值方法进行拓展, 研究了复合载荷作用下三维双相材料与界面垂直剪切型裂纹的裂纹尖端奇性指数和奇性应力场, 得出以位移间断函数表示的应力强度因子计算公式。

5. 使用有限部积分与边界元结合的方法, 利用密度函数基本解表示位移间断函数, 对超奇异积分方程组中的超奇异部分进行处理, 再利用有限部积分原理, 把超奇异积分方程组转化为代数方程组, 为复合载荷作用下三维双相材料与界面垂直剪切型裂纹问题建立了数值方法。数值方法部分的属于首次报道。

6. 用 $Fortran$ 语言编写了三维双相材料与界面垂直剪切型裂纹问题应力强度因子计算程序, 计算结果表明, 本文建立的数值方法具有良好的收敛性和很高的精度。同时得到应力强度因子随材料剪切模量比、裂纹形状比、多项式指数、配置点数及坐标等参数变化规律。即;

同时或单独改变材料剪切模量比, 多项式指数、配置点数、坐标值等参数时, 应力强度因子随裂纹形状比增加而增加, 增加梯度递降至零, $a/b \geq 8$ 时已接近二维双相复合材料裂纹数值结果。

同时或单独改变裂纹形状比, 多项式指数、配置点数、坐标值等参数时, 应力强度因子随材料剪切模量比变化规律为: $x_2 = 0$ 边, 随材料剪切模量比增加而增加, 增加梯度递减至零, $\mu_2/\mu_1 = 0$ 时, 取极小值 0, $\mu_2/\mu_1 \geq 20$ 时, 已趋于固定值; $x_2 = 2b$ 、 $x_1 = \pm a$ 边, 随材料剪切模量比增加而减小, 减小梯度递减至零, $\mu_2/\mu_1 = 0$ 时, 取极大值, $\mu_2/\mu_1 \geq 20$ 时, 已趋于固定值。

同时或单独改变材料剪切模量比、裂纹形状比、多项式指数、配置点数、坐标值等参数时，应力强度因子随载荷变化规律为：作用载荷 σ_{31}^∞ 时， $x_2 = 0, 2b$ 边 F_{II} 为零；作用载荷 σ_{32}^∞ 时， $x_1 = \pm a$ 边 F_{III} 为零。

同时或单独改变材料剪切模量比、裂纹形状比、坐标值等参数时，应力强度因子随多项式指数及配置点数变化规律为：随多项式指数增加，精度增加；随配置点数增加，精度增加，但配置点数不能小于多项式指数。

同时或单独改变材料剪切模量比、裂纹形状比，多项式指数、配置点数等参数时，应力强度因子随坐标值变化规律为：在 $x_2 = 0, 2b$ 边，随坐标 x_1/a 呈对称分布。在 $x_1 = \pm a$ 边，当 $\mu_2/\mu_1 = 1$ ，随坐标 x_2/b 呈对称分布。

6.2 讨论

综上所述，尽管本文的研究取得了一些积极的成果，也为三维双相材料断裂力学问题的研究做出了新的贡献，但是限于本文作者的水平、时间原因，还有很多具体内容没有来的及完成，作者认为可以在以下几个方面进一步开展研究：

1. 由于时间紧张和问题的复杂性，未对三维双相材料与界面斜交裂纹问题数值方法做详细的研究，给出的三维双相材料与界面斜交裂纹程序，还缺少超奇异部分子程序核心部分具体程序，这些研究内容作者将在今后的工作中继续完成。

2. 三维双相材料与界面斜交单根裂纹问题的理论部分已有了很好的基础，利用裂纹叠加性原理，三维双相材料与界面斜交多根裂纹问题、三维多相材料与界面斜交裂纹问题，可以以本论文为基础进一步研究下去。

3. 如果考虑到材料的其它特性（如压电特性），三维双相压电复合材料裂纹问题也可以由本方法很好解决，这部分工作也是作者以后研究中的重要内容。

参考文献

- [1] Fenner D N. Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. *Int. J. Frac.*, 1976, 12(5): 705~721
- [2] Wang W C, Chen J T. Singularities of an arbitrarily inclined semi-infinite crack meeting a bimaterial interface. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, 49(5): 671~680
- [3] Li X B, Zhang N R. Investigation of an arbitrary oriented crack meeting an interface between two elastic materials. *Euro. J. Mech. A/Solids*, 1997, 16(5): 795~821
- [4] Qin T Y, Noda N A. Analysis of a three-dimensional crack terminating at an interface using a hypersingular integral equation method. *J. Appl. Mech. ASEM*, 2002, 69: 626~632
- [5] Qin T Y, Noda N A. Stress intensity factors of a rectangular crack meeting a bimaterial interface. *Int. J. Solids Struct*, 2003, 40: 2473~2486
- [6] Jaswon M A. Integral equation methods in potential theory: I. London: In *Proc Roy Soc*, 1963: 23~32
- [7] Symm G T. Integral equation methods in potential theory: II. London: In *Proc Roy Soc*, 1963: 33~46
- [8] Rizzo F J. An integral equation approach to boundary value problem of classical elastostatics. *Appl. Math*, 1967, 25: 83~95
- [9] Cruse T A. Numerical solution in three-dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Struct*, 1969, 5: 1259~1274
- [10] Ghosh N, Rajiyah H, Ghosh S, et al. A new boundary element method formulation for linear elasticity. *ASEM J. Appl. Mech*, 1986, 53: 69~76
- [11] Lei X Y. A new BEM approach for linear elasticity. *Int. J. Solids Struct*, 1994, 31(24): 3333~3343
- [12] Lei X Y. A new BEM Approach for Reissner's plate bending. *Computer and Structures*, 1995, 54(6): 1085~1090
- [13] Yu D H. Natural Boundary integral method and its applications. Beijing: Kluwer academic, 2002: 30
- [14] Hadamard, Leanssurle J. calculates variations Hermannet fils. Paris: 1910
- [15] Hadamard. lectures on Cauchy problem in linear partial differential equations. Yale univ press, 1923
- [16] Ioakimidis N I. A natural approach to the introduction of finite-part integrals into crack problems of three-dimensional elasticity. *Engineering Fracture Mechanics*, 1982, 16: 669~673
- [17] Ioakimidis N I. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. *Acata Mech*, 1982, 45: 31~47

- [18] Sohn G H, Hong C S. Application of singular integral equations to embedded planar crack problems in finite body. Springer-Verlog, 1985, 2: 57~87
- [19] 汤任基. 断裂力学中的两类奇异积分方程. 上海交通大学学报, 1990, 24(5): 36~46
- [20] 秦太验, 汤任基. 三维断裂力学的有限部积分-边界元法. 全国第三届边界元学术会议论文集. 武汉: 1991
- [21] 汤任基. 秦太验. 三维有限体中平片裂纹的超奇异积分方程方法——I 理论分析. 上海力学, 1996, 17(3): 182~187
- [22] 汤任基. 秦太验. 三维有限体中平片裂纹的超奇异积分方程方法——II 数值分析. 上海力学, 1997, 18(1): 30~37
- [23] Lutz E. Exact Gaussian quadrature methods for near singular integrals in the boundary element method. Eng Anal Bound Elem, 1992, 91: 233~245
- [24] Qian J T, Cheng L G. Dynamic analysis of rigid surface footings by BEM. J Sound Vib, 1998, 214(4): 747~759
- [25] Schanz M, Antes H. New visco-and-elastodynamic time domain BEM formulation. Compute Mech, 1997, 20(5): 452~459
- [26] Williams M L. The stress around a fault or crack in dissimilar media. Bulletin of the Seismological Society of America, 1959, 48: 199~204
- [27] Sih G C, Rice J R. The bending of plates of dissimilar materials with cracks. J.Appl.Mech, 1964, 31: 477~482
- [28] England A H. A crack between dissimilar media. J.Appl.Mech, 1965, 32: 400~402
- [29] Rice J R, Sih G. C. Plane problems of cracks in dissimilar media. J.Appl.Mech, 1965, 32: 418~423
- [30] Erdogan F, Gupta G. D. Layered composites with an interface flaw. Int.J.Solids Struct, 1972, 8: 1089~1107
- [31] Erdogan F, Gupta G D. Stresses near a flat inclusion in bonded composites with a flaw, Int.J.Solids Struct, 1972, 8: 533~547
- [32] Atkinson C. On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics. Int.J.Frac, 1977, 13(6): 807~819
- [33] Rice J R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. J.Appl.Mech, 1988, 55: 98~103
- [34] 王自强. 界面断裂力学简介与展望. 力学与实践, 1991, 13(4): 1~8
- [35] Zak A R, Williams M L. Crack point stress singularities at a biomaterial interface. J.Appl.Mech, 1963, 30: 142~143
- [36] Bogy D B. On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface. J.Appl.Mech, 1971, 38: 911~918

- [37] Cook T S, Erdogan F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface .J.Appl.Mech, 1972, 38: 911~918
- [38] Erdogan F, Cook T S. Anti-plane shear crack terminating at and going through a biomaterial interface . Int.J.Frac, 1974, 10(2): 227~240
- [39] Sinnathurai, Vijayakumar, Donald, et al. Stress behavior in the vicinity of a crack approaching a biomaterial interface. Engng.Frac.Mech, 1983, 17(4): 313~321
- [40] Ting T C, Hong P H. Singularities at the tip of a crack normal to the interface of an anisotropic layered composite. Int. J. Solids Struct, 1984, 20(5): 439~454
- [41] Erdogan F, Kaya A C, Joseph P F. The crack problem in bonded nonhomogeneous materials. J.Appl.Mech, 1991, 58: 410~416
- [42] Wen P H. The displacement discontinuity method applied to calculate the SIFs in two bonded elastic layers with a crack perpendicular to the interface. Int.J.Frac, 1991, 48: 57~61
- [43] Gupta V, Argon A S, Suo S. Crack deflection at an interface between two orthotropic media. J.Appl.Mech, 1992, 59: 79~86
- [44] Dai H. A crack normal to and terminating at a biomaterial interface.Engng.Frac.Mech, 1994, 49(4): 517~532
- [45] Fenner D N. Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. Int J.Frac, 1976, 12(5): 705~721
- [46] Maria, Comninou, Dundurs J. A closed crack tip terminating at an interface. J.Appl.Mech, 1979, 46: 97~100
- [47] Wang W C, Chen J T. Singularities of an arbitrarily inclined semi-infinite crack meeting a bi-material interface .Engineering Fracture Mech, 1994, 49(5): 671~680
- [48] Chen H P. Stress singularities in anisotropic multi-material wedges and junctions. Int.J.Solids Struct, 1998, 35(11): 1057~1073
- [49] Ashbaugh Noel. Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface. Int J Frac, 1975, 11(2): 205~218
- [50] Chen C, Ma B L. Anti-plane problems in composite anisotropic materials with an inclined crack terminating at a biomaterial interface. Int.J.Solids Struct, 1990, 26(12): 1387~1400
- [51] Tewary V K, Berger J R. Elastic green's function for a biomaterial composite solid containing a crack inclined to the interface. Computational Mechanics, 1996, 19: 41~48
- [52] Wang X D, Meguid S A. On the general treatment of an oblique crack near a biomaterial interface under anti-plane loading. Int.J.Solids Struct, 1996, 33(17): 2485~2500
- [53] Wang Y B, Sun Y Z. A new boundary integral equation method for cracked 2-D anisotropic bodies. Engineering Fracture Mechanics, 2005, 72: 2128~2143

- [54] Garcí Sánchez. Sáez.Andrés F et al. Anisotropic and piezoelectric materials fracture analysis by BEM. Computers and Structures, 2005, 83(10-11): 804~820
- [55]Noda N A. Variation of the stress intensity factor along the front of a 3-D rectangular crack subjected to mixed-mode load. Archive of Applied Mechanics, 2002, 72: 599~614
- [56] Chen Y Z. Hyper-singular integral equation method for three-dimensional crack problem in shear mode. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2004, 20: 441~454
- [57] Westergaard H M. Bearing pressures and cracks. ASME Appl. Mechanics. Series A, 1939, 66; 49
- [58] Tada H. Studies of the crack opening stretch concept in application to several fracture problems [PhD dissertation].Pennsylvania: Lehigh University. June, 1972.
- [59] Xiao Q Z, karihaloo B L. Approximate Green's functions for singular and higher order terms of an edge crack in a finite plate. Engineering Fracture Mechanics, 2002, 69: 959~981
- [60] Tracey D M, Cook T S. Analysis of power type singularities using finite elements. Int. J. Numer. Meth. Engng, 1977, 11: 1225~1233
- [61] 秦太验, 汤任基. 三维无限体中两平行平片裂纹相互干扰的超奇异积分方程解法.固体力学学报, 1995, 1: 41~47
- [62] 汤任基,秦太验. 三维断裂力学的超奇异积分方程方法.力学学报, 1993, 25(6): 665~675
- [63] 秦太验,汤任基. 求解平片裂纹问题的有限部积分与边界元法.应用数学与力学, 1992, 13(12): 1045~1051
- [64] 秦太验. 三维断裂力学的有限部积分—边界元法研究[博士学位论文].上海:上海交通大学, 1992
- [65] 汤任基.断裂力学中两类奇异积分方程.上海交通大学学报, 1990, 24(5): 36~46
- [66] Kassir M K. A three-dimensional rectangular crack subjected to shear loading. Int. J. solids struct, 1982, 18: 1075~1082
- [67] Cruse T A, Buren V. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. Int.J.Frac, 1974, 7: 1~15

致 谢

本人在攻读硕士学位期间，深得导师秦太验教授的指导。导师一丝不苟的治学态度，广博的知识，正直宽厚的人格及对新领域极大的热情深深影响着我；特别是对我的关怀，鼓励和真诚的民主思想，使我得以在广泛的学科前沿领域选取感兴趣和值得研究的课题。

感谢力学系提供的宽松、民主、轻松的学习环境。感谢焦群英教授、徐泳教授对本人研究思路和做人方面的指导。感谢徐春晖老师、周哲老师对本人的帮助。感谢两院各位同事和朋友给予的大力帮助和支持。感谢妻子的帮助和支持。

作者：朱伯靖

2005 年 8 月

作者简介

基本情况:

朱伯靖，男，满族，1974 年 6 月出生，河北永清人。

1991.9-1995.7	沈阳农业大学	机械设计制造专业	本科
1995.7-2002.9	华南热带农业大学	力学教研室	教师
2002.9-2003.9	中国石油大学（北京）	工程力学专业	进修
2003.9-2005.9	中国农业大学	固体力学专业	硕士

发表论文:

[1] 朱伯靖，秦太验. 三维复合材料复合裂纹特殊边界元法.农机化研究. 2006.1

[2] 朱伯靖，秦太验. 垂直于双相材料界面混合型三维裂纹的超奇异积分解法.中国农业大学学报.