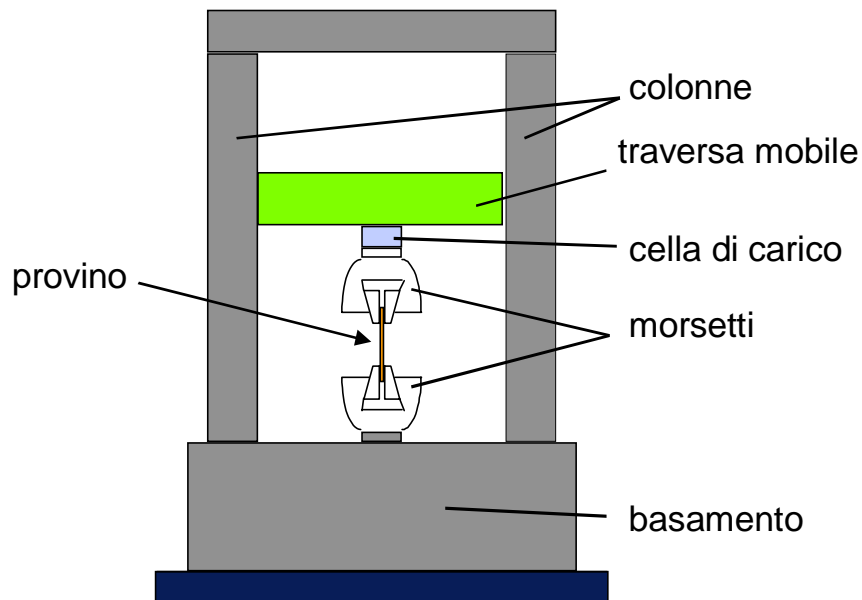


Prova di trazione

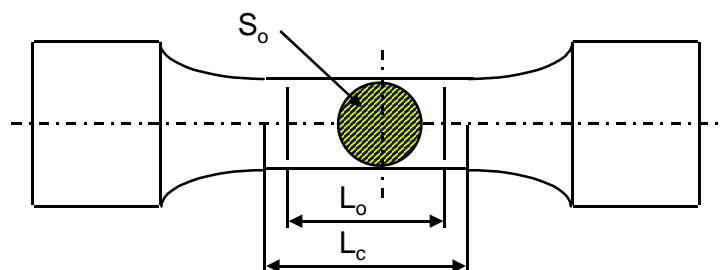
UNI 552/86 -556/79

Macchina di prova



Viene imposto uno spostamento alla traversa e si misura il carico applicato (F)
Si misura l'allungamento in un tratto del provino (ΔL)

Provini

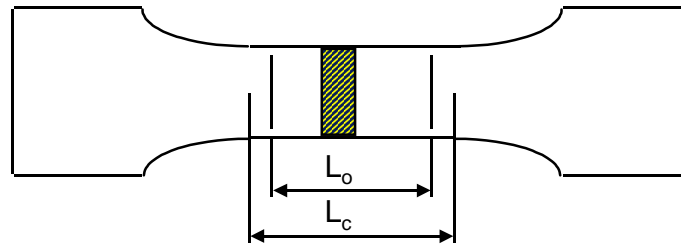


Schema di provino a sezione circolare

L_c : lunghezza della parte calibrata

L_0 : lunghezza tra i riferimenti (iniziale)

S_0 : area della sezione calibrata (iniziale)



Schema di provino a sezione rettangolare

L_c : lunghezza della parte calibrata
 L_0 : lunghezza tra i riferimenti (iniziale)
 S_0 : area della sezione calibrata (iniziale)

Definizione elementare di tensione e deformazione

tensione media	forza
$\sigma = \frac{F}{S_0}$	F
allungamento relativo:	allungamento
$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$	$\Delta L = L - L_0$
\swarrow allungamento percentuale \searrow	
$\varepsilon = 100 \frac{L - L_0}{L_0}$	

Risultato della prova

Diagrammi F- ΔL

La forza F dipende dalla deformazione e dall'area della sezione.

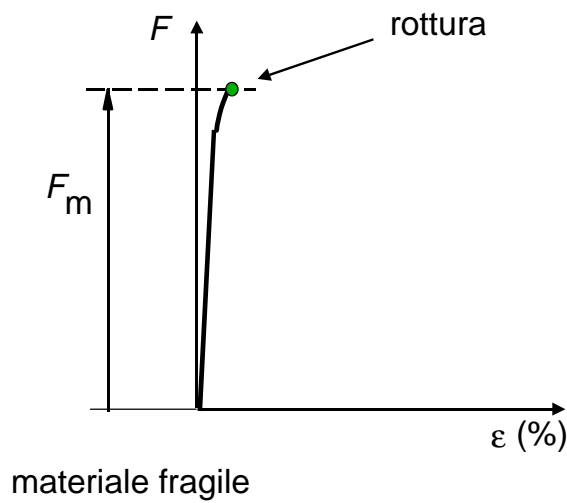
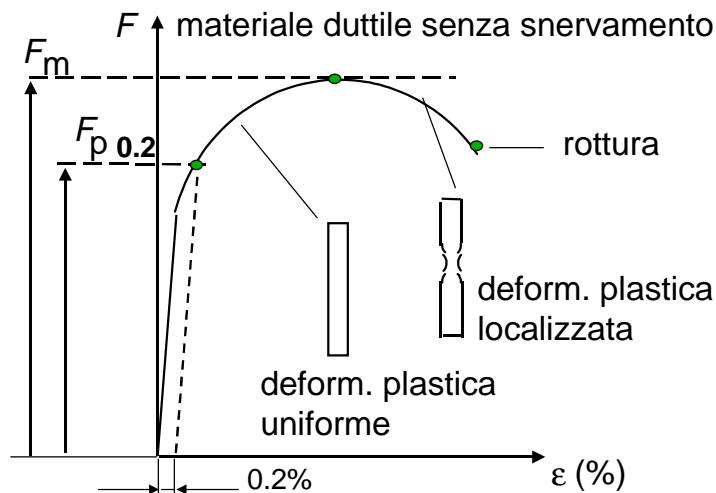
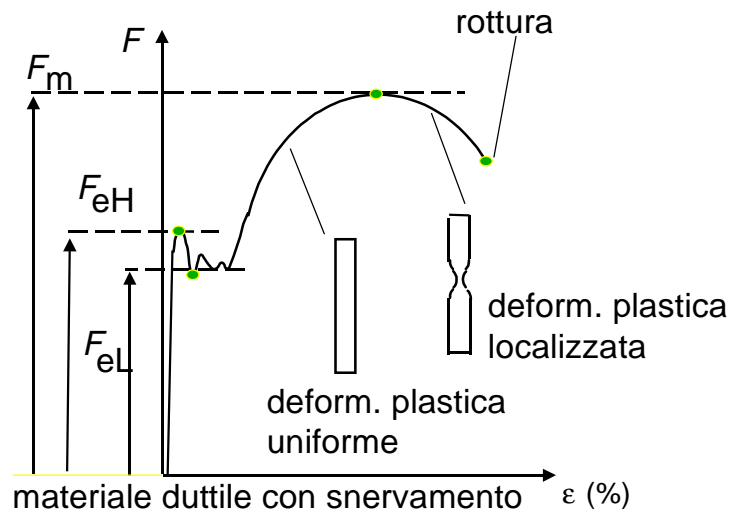
F_m = carico massimo (o di rottura)

F_{eH} = carico di snervamento superiore

F_{eL} = carico di snervamento inferiore

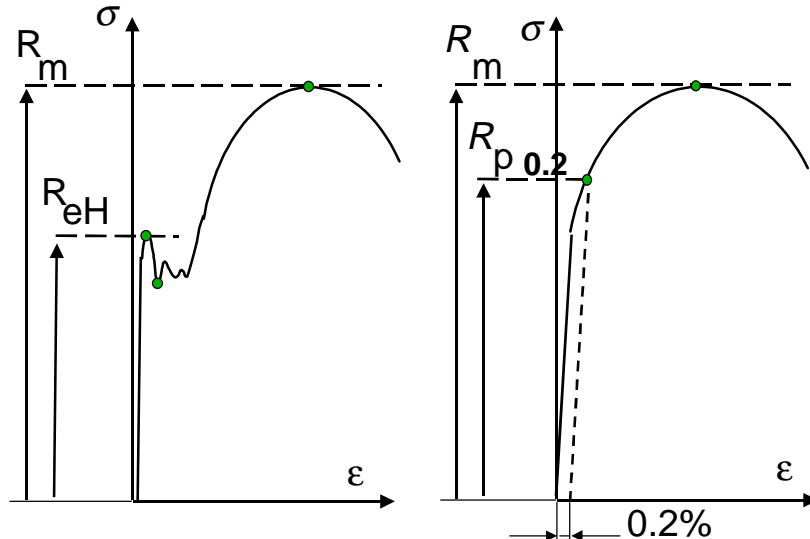
$F_{p0.2}$ = carico di scostamento dalla proporzionalità

Il primo tratto delle curve è lineare ($F=k\varepsilon$)



Diagrammi σ - ϵ

Si ottengono dai diagrammi precedenti dividendo convenzionalmente le forze per la sezione iniziale (tensioni ingegneristiche):

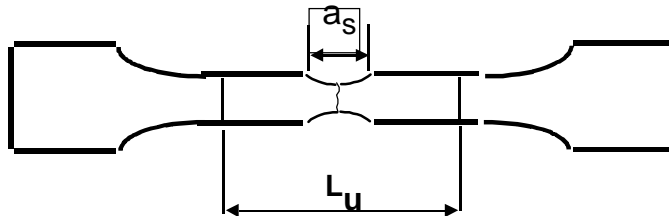


R_m = carico unitario massimo (tensione di rottura)

R_{eH} = carico unitario di snervamento superiore (tensione di snervamento)

$R_{p0.2}$ = carico unitario di scostamento dalla proporzionalità (tensione di snervamento

Allungamento percentuale a rottura:



$$L_u = L_o(1 + \epsilon_m) + a_s$$

$$A = 100 \frac{L_u - L_o}{L_o} = 100 \epsilon_m + 100 \frac{a_s}{L_o}$$

deformazione uniforme a R_m

allungamento dovuto alla strizione

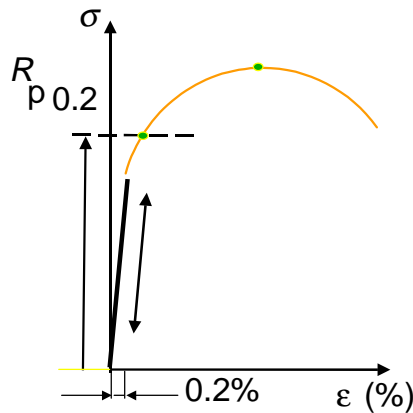
Gli allungamenti a rottura sono ottenuti con provette di dimensioni standard.

Modulo elastico, Coefficiente di Poisson

Consideriamo solo materiali omogenei (uguali caratteristiche in ogni punto) ed isotropi (uguali caratteristiche in tutte le direzioni)

Il rapporto fra le tensioni e le deformazioni longitudinale è detto Modulo elastico (E) o anche modulo di Young:

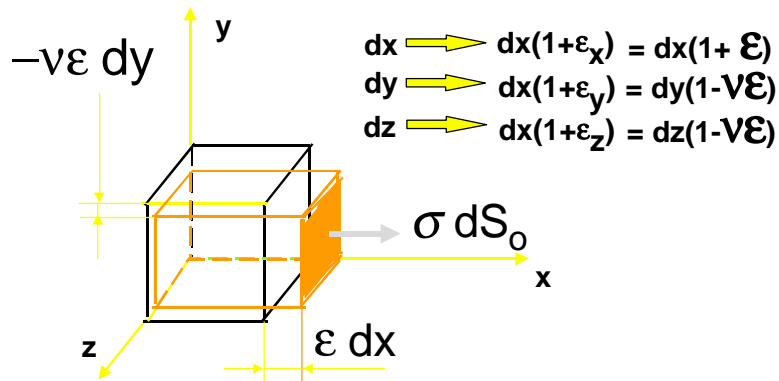
HOOKE: ut tensio sic vis



nel tratto rettilineo
il coefficiente
di proporzionalità
è il
modulo elastico

$$\sigma = E \varepsilon$$

Durante la prova il provino, anche nel tratto lineare elastico, si allunga e la sezione si riduce. Il rapporto (cambiato di segno) fra la contrazione laterale e quella longitudinale è detto coefficiente di Poisson (ν).



$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \equiv -\nu\varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}$$



Valori tipici

Carichi di rottura, snervamento e allungamenti percentuali a rottura

Materiale	(valori minimi)	$R_{eH}(R_{p0,2})$ (MPa)	R_m (MPa)	A %
acciai al C	Fe 360	235	360	26
	Fe 430	275	430	23
	Fe 510	355	510	21
acciai da bonifica	C30	325	540	20
	C40	370	590	18
	41Cr4	540	740	14
	39NiCrMo3	540	740	13
ghise grigie	G10	-	100	-
	G20	-	200	-
	G30	-	290	-
ghise sferoidali	GS370-17	230	370	17
	GS500-7	320	500	7
	GS700-2	420	700	2

Unità di misura delle forze Newton (N), delle lunghezze millimetri (mm), delle tensioni $N/mm^2 = MPa$

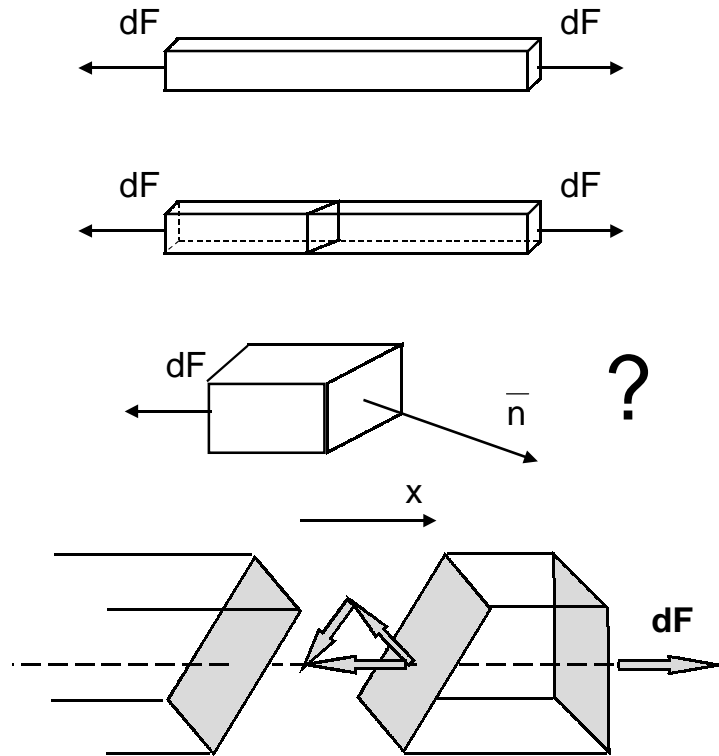
Tecnicamente si considerano fragili i materiali con $a < 5\%$ e Duttile quelli con $a > 10\%$

Moduli elastici e coefficienti di Poisson

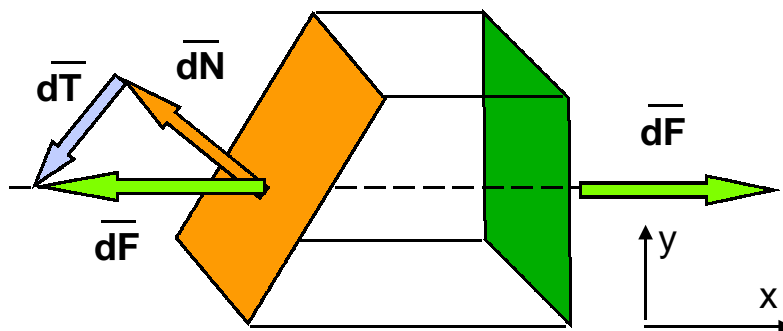
	E (MPa)	ν
acciaio al C	$2 \cdot 10^5$	0.3
ghise	$1 \cdot 10^5 - 1.8 \cdot 10^5$	0.27
titanio	$1.2 \cdot 10^5$	0.3
alluminio	$7 \cdot 10^4$	0.3

Stato di tensione in un punto (approccio elementare)

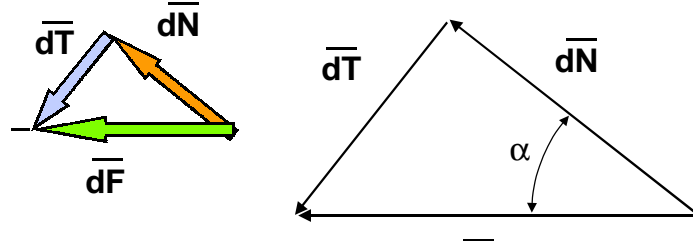
Ci chiediamo cosa capita su una faccia obliqua del provino di trazione
Consideriamo una piccola areola attorno al punto di interesse (area dS)



Consideriamo la condizione di equilibrio: Sulla faccia obliqua vi sarà una forza normale alla superficie (dN) ed una tangenziale (dT)



Scriviamo le equazioni di equilibrio (NB: EQUILIBRIO DELLE FORZE)



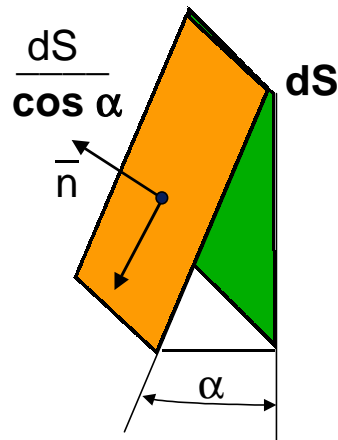
se l'incognita è dF :

$$\rightarrow dF = dN \cos \alpha + dT \sin \alpha \quad \uparrow \quad 0 = dN \sin \alpha - dT \cos \alpha$$

se le incognite sono dN e dT :

$$dN = dF \cos \alpha \quad dT = dF \sin \alpha$$

In termini di tensioni bisogna considerare che le due aree considerate sono dS e $ds/\cos\alpha$.



Sulla faccia inclinata si individuano tensioni normali alla faccia (σ_n) e tensioni tangenziali alla faccia (τ_n). Possiamo quindi scrivere:

$$dF = \sigma \cdot dS$$

$$dN = \sigma_n \frac{dS}{\cos \alpha}$$

$$dT = \tau_n \frac{dS}{\cos \alpha}$$

e quindi:

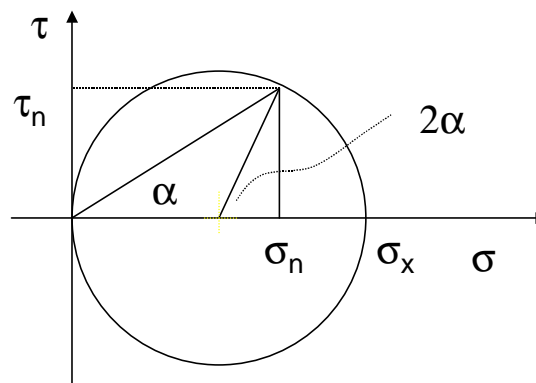
$$dN = dF \cos \alpha \Rightarrow \sigma_n \frac{dS}{\cos \alpha} = \sigma \cdot dS \cos \alpha \Rightarrow \sigma_n = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$$

$$dT = dF \sin \alpha \Rightarrow \tau_n \frac{dS}{\cos \alpha} = \sigma \cdot dS \sin \alpha \Rightarrow \tau_n = \sigma \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

che risulta l'equazione di un cerchio nel piano σ - τ .

Cerchio di Mohr- Tensioni principali (caso elementare)

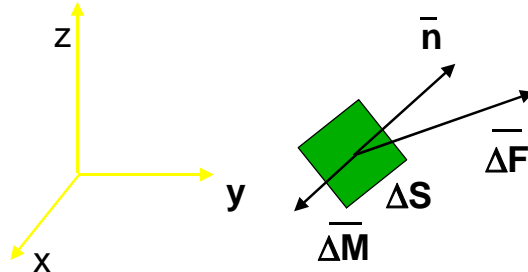
Il cerchio di Mohr è una rappresentazione grafica di quanto detto:



Le direzioni normali alle facce in cui le tensioni tangenziali sono nulle sono dette Direzioni principali e le corrispondenti tensioni Tensioni normali principali (o tensioni principali).

Stato di tensione tridimensionale (caso generale)

Prendiamo, nell'intorno di un punto all'interno di un corpo sollecitato in modo qualunque, una superficie elementare (ΔS) individuata da un versore \bar{n} .



su questa superficie agiscono una forza elementare ΔF e un momento elementare ΔM (sono vettori).

Il principio di Cauchy dice che:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S} = 0$$

mentre la forza elementare genera il vettore delle tensioni \bar{t} :

$$\bar{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

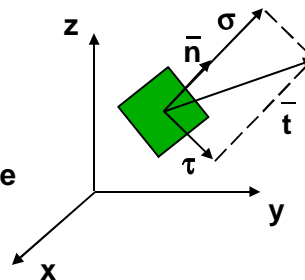
le tensioni normali e tangenziali agenti sulla superficie possono essere calcolate se si conosce \bar{t} :

Tensione normale

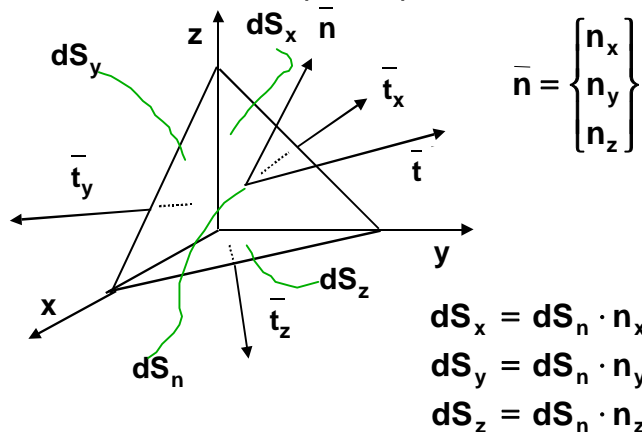
$$\sigma = \bar{n} \cdot \bar{t}$$

Tensione tangenziale

$$\tau = \sqrt{\bar{t} \cdot \bar{t} - \sigma^2}$$



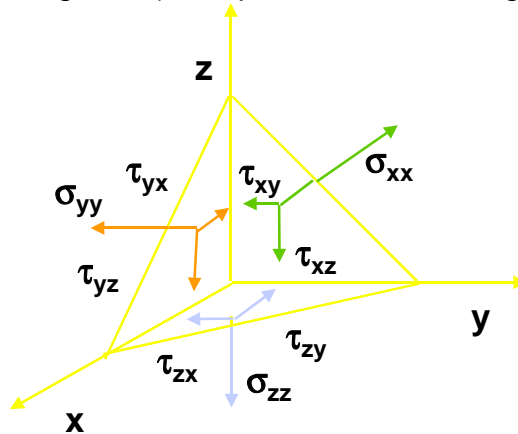
- Lo stato di tensione in un punto è noto quando siano noti i vettori delle tensioni \bar{t} associati a tutte le possibili direzioni (\bar{n})
- Conoscendo i vettori delle tensioni in tre direzioni ortogonali è possibile conoscere il vettore delle tensioni \bar{t} in una direzione qualunque



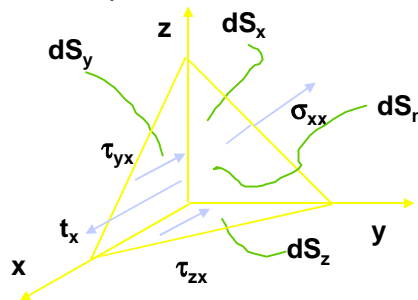
I vettori delle tensioni sono a tre componenti:

$$t_i = \{\sigma_{ii}; \tau_{ij}; \tau_{ik}\}^T$$

NB: si definiscono facce positive del sistema ortogonale coordinato quelle rispetto alle quali il versore è uscente, negative quelle con versore entrante. Le tensioni sono positive se agiscono su una faccia positiva nella direzione positiva oppure se agiscono su una faccia negativa in direzione negativa (versi positivi indicati in figura)



Scriviamo l'equazione di equilibrio rispetto alla direzione x:



$$t_x dS_n - \sigma_{xx} dS_x - \tau_{yx} dS_y - \tau_{zx} dS_z = 0$$

$$t_x dS_n - \sigma_{xx} dS_n n_x - \tau_{yx} dS_n n_y - \tau_{zx} dS_n n_z = 0$$

$$t_x - \sigma_{xx} n_x - \tau_{yx} n_y - \tau_{zx} n_z = 0$$

eseguendo la stessa operazione nelle tre direzioni si ottiene:

$$t_x - \sigma_{xx} n_x - \tau_{yx} n_y - \tau_{zx} n_z = 0$$

$$t_y - \tau_{xy} n_x - \sigma_{yy} n_y - \tau_{zy} n_z = 0$$

$$t_z - \tau_{xz} n_x - \tau_{yz} n_y - \sigma_{zz} n_z = 0$$

che scritte in forma matriciale danno:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

o in forma sintetica:

$$\vec{t} = [\sigma] \cdot \vec{n}$$

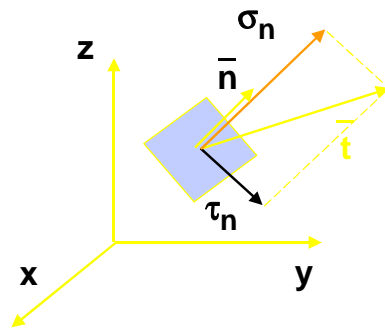
$[\sigma]$ = Rappresentazione matriciale del tensore delle tensioni (tensore di Cauchy).
 Note le 9 componenti del il tensore di Cauchy è quindi noto lo stato di tensione nel punto.
 Scrivendo opportune equazioni di equilibrio si può dimostrare che il tensore delle tensioni è simmetrico:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

e quindi per conoscere lo stato di tensione in un punto è necessario poter calcolare 6 componenti del tensore delle tensioni in tre piani ortogonali.
 Si noti inoltre che il tensore delle tensioni dipende dal sistema di riferimento utilizzato per calcolarne le componenti

Tensioni e direzioni principali (caso generale)

Esistono direzioni privilegiate il cui vettore delle tensioni \vec{t} è colineare con la normale alla superficie (componente tangenziale = 0). Tali direzioni sono dette direzioni principali e le tensioni normali agenti sulle superfici ortogonali alle direzioni principali sono dette tensioni principali.



per una direzione principale deve essere

$$\{t\} = \sigma_p \{n\} = \sigma_p [1]\{n\}$$

ma per definizione

$$\{t\} = [\sigma]\{n\}$$

segue:

$$([\sigma] - \sigma_p \cdot [1])\{n\} = 0$$

cioè:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

dove \vec{n} è il versore della direzione principale. Il sistema scritto è un sistema di tre equazioni in 4 incognite. Risolvibile solo se

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0$$

Quindi per trovare le direzioni principali e le tensioni principali si deve risolvere un problema agli autovalori.

Essendo la matrice simmetrica esistono tre autovalori reali (le tre tensioni principali) e tre direzioni principali ortogonali fra loro.



Sviluppando il determinante si ottiene la seguente equazione (equazione di Lagrange):

$$\sigma_p^3 - \sigma_p^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_p(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2) - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_z\tau_{xy}^2 - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2) = 0$$

Le tensioni principali vengono indicate normalmente con i simboli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (oppure $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) e ordinate, per consuetudine, in modo che $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Per le tre direzioni principali associate alle tre tensioni principali possono verificarsi tre casi:

1. se $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ esistono tre direzioni principali mutuamente perpendicolari;
2. se due tensioni principali sono uguali (ad es. $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$), la direzione principale corrispondente alla tensione principale diversa è unica, ma ogni direzione perpendicolare ad essa è principale
3. se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (stato di tensione idrostatico) qualunque direzione è una direzione principale.

Un sistema di riferimento i cui assi sono paralleli alle direzioni principali è detto sistema di riferimento principale.

Per valutare le direzioni principali è sufficiente risolvere il sistema

Per ricavare le tre direzioni principali rispetto alla terna coordinata assunta come riferimento per il calcolo del tensore delle tensioni si risolve il sistema (1) inserendo di volta in volta il valore della i-esima tensione principale per la quale si vuole ottenere la direzione principale con la condizione aggiuntiva di normalizzazione:

$$n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 = 1$$

Bisogna notare che le tensioni principali e le direzioni principali sono una caratteristica intrinseca dello stato di sollecitazione in un punto e quindi sono del tutto indipendenti dal sistema di riferimento utilizzato per il loro calcolo. Questo implica che i coefficienti dell'equazione di Lagrange devono essere costanti, o meglio invarianti, al variare del sistema di riferimento utilizzato per il calcolo delle tensioni principali. Questi coefficienti vengono denominati primo, secondo e terzo invariante e sono così definiti:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_z\tau_{xy}^2 - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2$$

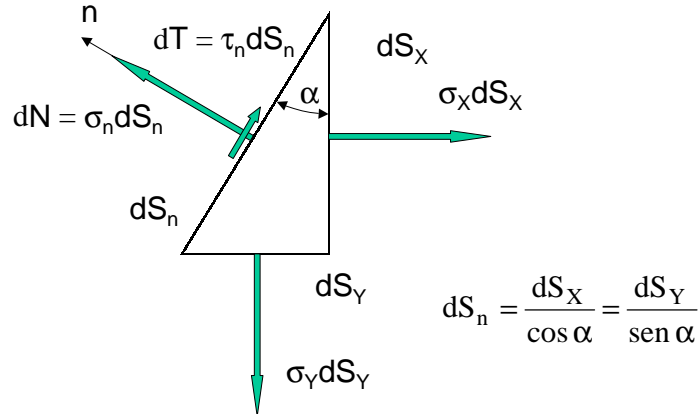
In un sistema di riferimento principale il tensore delle tensioni risulta:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

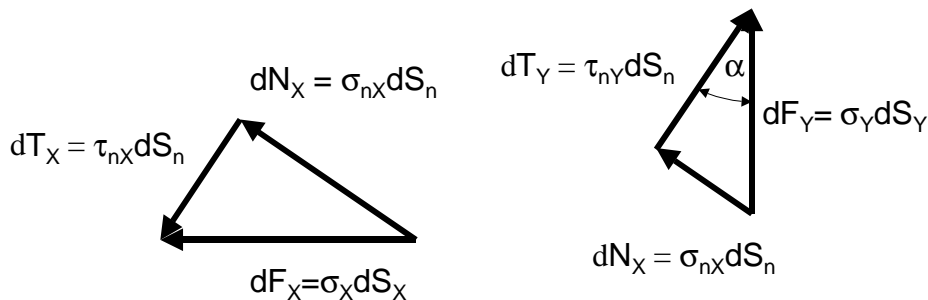
Cerchi di Mohr nel caso generale.

Si assuma un sistema di riferimento principale e si consideri cosa capita su un piano facente parte di un fascio avente per asse una delle direzioni principali (ad esempio la direzione Z.

Operando questa scelta le equazioni di equilibrio riguardano solo le grandezze nelle altre due direzioni.



Per semplicità consideriamo cosa succede separatamente l'effetto delle due tensioni principali considerate, per poi ottenere la soluzione finale con la sovrapposizione degli effetti (valida solo in campo lineare elastico).



Con riferimento alle figure si ha:

$$dN_X = dF_X \cos \alpha \Rightarrow \sigma_{nX} \frac{dS_X}{\cos \alpha} = \sigma_X \cdot dS_X \cos \alpha \Rightarrow \sigma_{nX} = \sigma_X \cdot \cos^2 \alpha$$

$$dT_X = dF_X \sin \alpha \Rightarrow \tau_{nX} \frac{dS_X}{\cos \alpha} = \sigma_X \cdot dS_X \sin \alpha \Rightarrow \tau_{nX} = \sigma_X \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

$$dN_Y = dF_Y \sin \alpha \Rightarrow \sigma_{nY} \frac{dS_Y}{\sin \alpha} = \sigma_Y \cdot dS_Y \sin \alpha \Rightarrow \sigma_{nY} = \sigma_Y \cdot \sin^2 \alpha$$

$$dT_Y = dF_Y \cos \alpha \Rightarrow \tau_{nY} \frac{dS_Y}{\sin \alpha} = \sigma_Y \cdot dS_Y \cos \alpha \Rightarrow \tau_{nY} = \sigma_Y \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti si ottiene

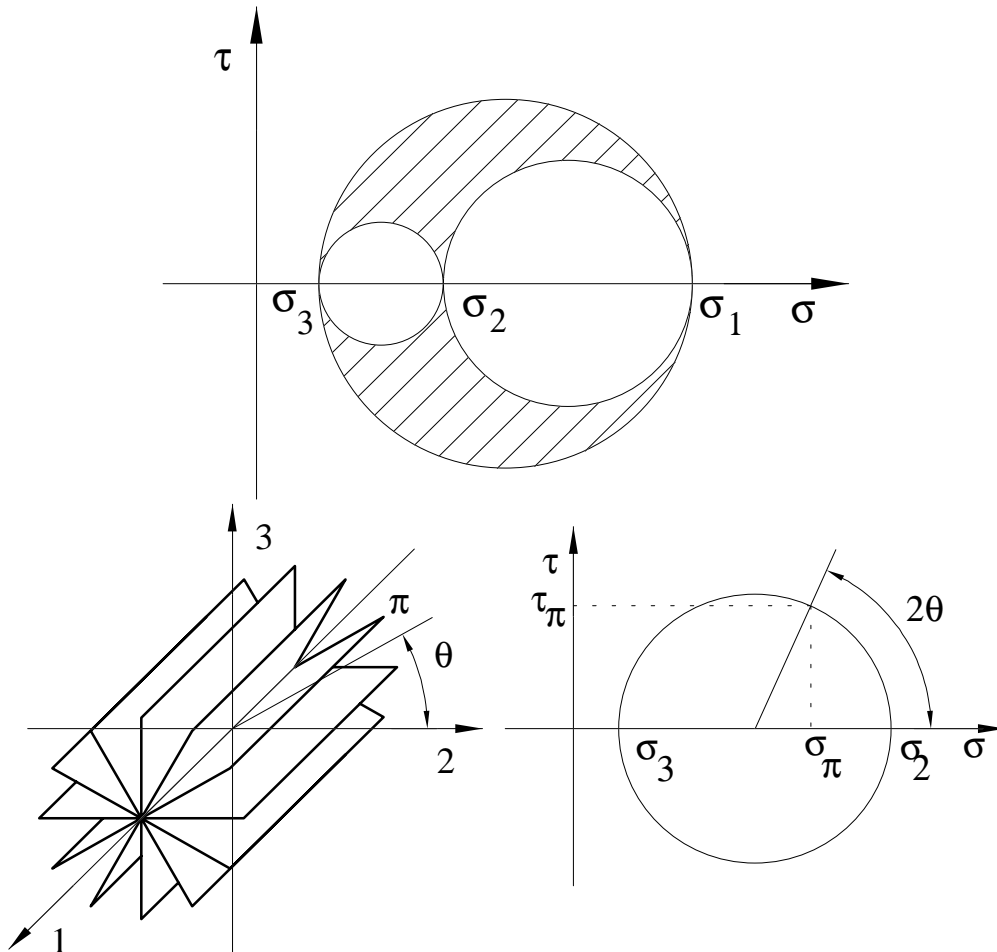
$$\sigma_n = \sigma_{nX} + \sigma_{nY} = \sigma_X \cos^2 \alpha + \sigma_Y \sin^2 \alpha = \sigma_Y + (\sigma_X - \sigma_Y) \cos^2 \alpha$$

$$\tau_n = \tau_{nX} - \tau_{nY} = \sigma_X \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_Y \sin \alpha \cos \alpha = (\sigma_X - \sigma_Y) \sin \alpha \cos \alpha$$

cioè le equazioni parametriche di un cerchio con

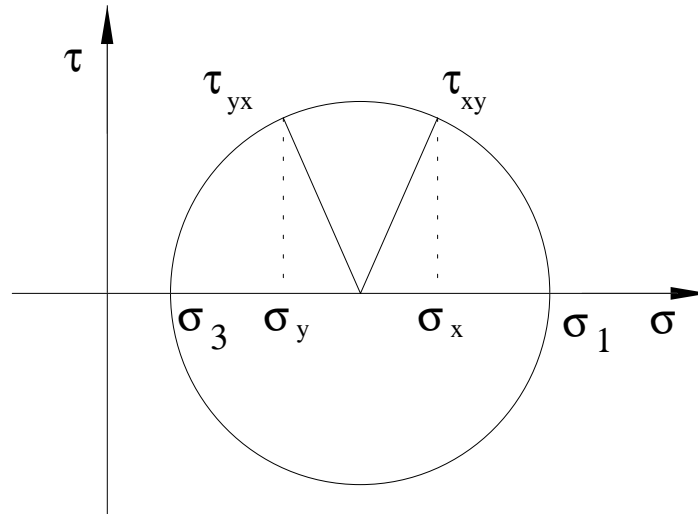
$$\begin{array}{l} \text{diametro} \quad (\sigma_X - \sigma_Y) \\ \text{centro} \quad \sigma_Y + \frac{(\sigma_X - \sigma_Y)}{2} = \frac{(\sigma_X + \sigma_Y)}{2} \end{array}$$

Analoghi ragionamenti si possono effettuare rispetto alle altre due direzioni principali. Si ottengono così tre cerchi di Mohr, ognuno relativo ai piani facenti parte del fascio con asse la direzione principale non considerata.



Si può anche dimostrare che i piani non appartenenti a uno dei tre fasci coordinati hanno uno stato di tensione rappresentato dalla regione tratteggiata della figura.

I cerchi di Mohr sono un utile strumento per valutare le tensioni principali. Nel particolare caso di stato di tensione in cui si conosca a priori una direzione principale e la relativa tensione, conoscendo lo stato di sollecitazione calcolato in un qualsiasi sistema di riferimento che abbia un asse coincidente con la direzione principale nota, è possibile tracciare direttamente il cerchio di Mohr corrispondente e ricavare da esso le tensioni principali incognite (Fig.1.7). In questo caso sono noti due punti del cerchio di Mohr σ_{xx} , τ_{xy} e σ_{yy} , τ_{yx}) e si sa a priori che il centro del cerchio deve giacere nel punto medio fra le due tensioni normali

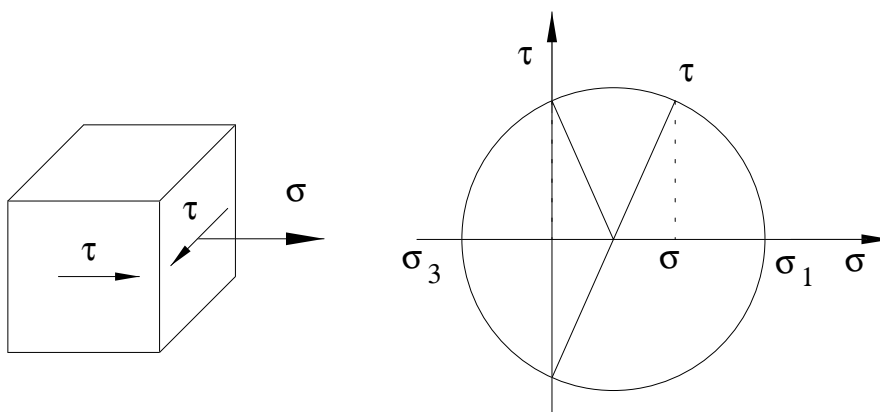


Le tensioni principali possono essere ricavate con semplici considerazioni geometriche e valgono:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

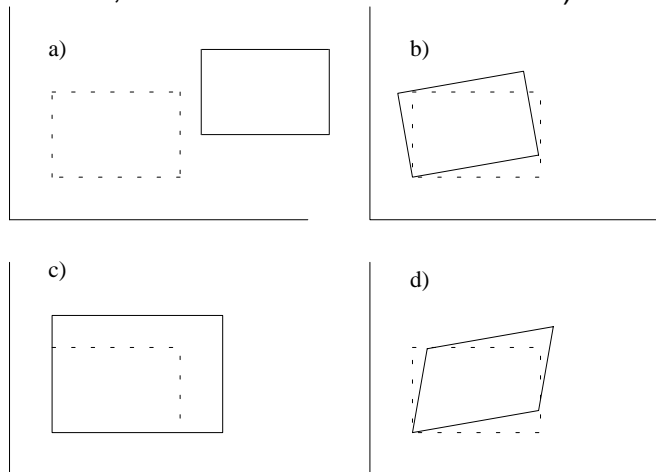
Conoscendo la terza tensione principale è poi possibile ricavare gli altri cerchi di Mohr. Nel caso molto frequente in cui lo stato di sollecitazione sia completamente definito da una tensione normale σ e una tensione tangenziale τ agenti sul medesimo piano, come a esempio nel punto di progetto di un albero soggetto a flessione più sforzo normale e torsione si ha la situazione illustrata nella figura. Le tensioni principali in questo caso varranno:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$$



Stato di deformazione

Lo spostamento totale dei punti in un continuo è dovuto a *spostamenti rigidi*, *rotazioni rigide* e *deformazioni*; la deformazione di un corpo è composta da una *dilatazione* (allungamenti delle fibre passanti per il punto senza cambiamento degli angoli fra le fibre, legata quindi ai cambiamenti di volume) e da una *distorsione* (cambiamento di forma, o meglio degli angoli fra le fibre, senza cambiamento di volume).



Caso bidimensionale

Moti rigidi: a) spostamento rigido; b) rotazione rigida;

Deformazione: c) dilatazione ; d) distorsione

In generale lo stato di *deformazione* in un punto è noto se si conoscono le variazioni di lunghezza di tutte le fibre passanti per il punto tutte le variazioni fra gli angoli di due fibre passanti per il punto.

Analogamente a quanto visto per le tensioni tali variazioni sono note se si conoscono le variazioni di lunghezza e di angoli di tre fibre passanti per il punto e parallele ad un sistema di riferimento cartesiano.

Svolgendo gli opportuni calcoli si ottiene che lo stato di deformazione è descritto, a partire dagli spostamenti depurati dai moti rigidi , dal seguente tensore:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

dove du , dv , dw sono le componenti dello spostamento relativo (cioè depurate dallo spostamenti rigidi) del punto.

Si noti che tale trattazione è valida solo se le deformazioni e le rotazioni rigide sono piccole.

Nella pratica ingegneristica si utilizzano i seguenti simboli:

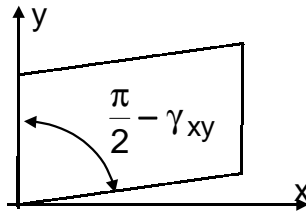
deformazioni unitarie longitudinali:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

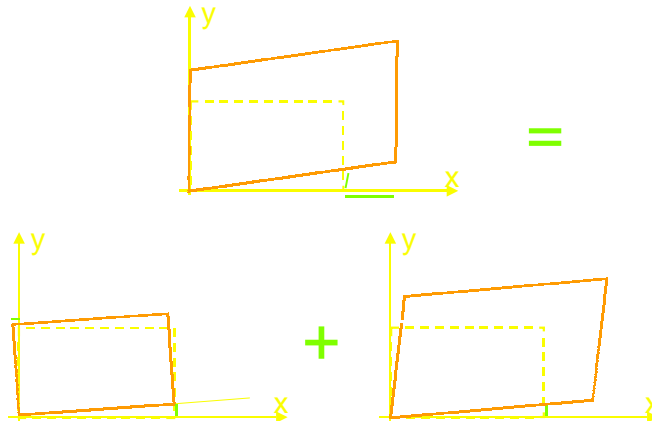
Scorrimenti:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Si noti ogni scorrimento può essere visto come l'angolo complementare a quello fra due fibre passanti per il punto che prima della deformazione erano perpendicolari:



Si noti che gli angoli così definiti contengono anche una componente di rotazione rigida:



Cioè gli scorrimenti non sono grandezze tensoriali.

Utilizzando la simbologia vista il tensore della deformazione risulta:

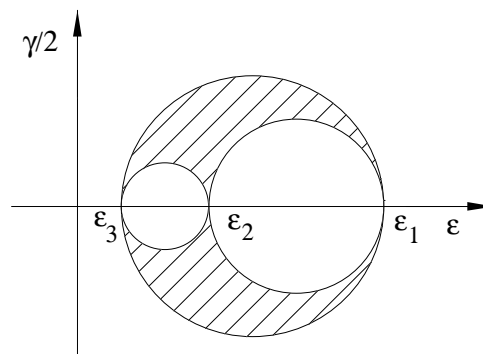
$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

E' evidente l'analogia formale con il tensore delle tensioni; questo significa che vi saranno tre direzioni privilegiate (principali) lungo le quali vi sono solo dilatazioni e non distorsioni. Per i materiali isotropi le direzioni principali delle deformazioni coincidono con quelle delle tensioni

Analogamente a quanto fatto per il tensore delle tensioni è possibile ricavare i valori delle deformazioni principali risolvendo il problema agli autovalori:

$$\det \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_p & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_p & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_p \end{vmatrix} = 0$$

e tracciare i cerchi di Mohr delle deformazioni (in un piano $\varepsilon, \gamma/2$).



Leggi costitutive del materiale

Abbiamo già visto che in una prova di trazione le deformazioni presenti sono legate alla tensione applicata.

Quando lo stato di sollecitazione è tridimensionale si può dimostrare che le tensioni normali non producono scorrimenti, e le tensioni tangenziali non producono dilatazioni. Si supponga adesso di avere un corpo su cui agiscono tre tensioni normali perpendicolari fra loro ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$). Applicandole una alla volta otteniamo la situazione illustrata nella tabella seguente:

	σ_x	σ_y	σ_z
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
ε_y	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
ε_z	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Applicando la sovrapposizione degli effetti si ottiene:



1 Prova di Trazione - Stato di Tensione e di deformazione in un punto

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

Il rapporto fra le tensioni tangenziali e gli scorrimenti è invece dato dal modulo di elasticità tangenziale G:

$$\tau_{ij} = G\gamma_{ij}$$

Si può inoltre dimostrare che le tre costanti individuate (E, G, ν) non sono indipendenti e vale la relazione:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ipotesi di cedimento - Tensioni ideali

Le caratteristiche di resistenza di un materiale vengono determinate con una prova di trazione che sollecita uniassialmente il provino.

Abbiamo visto che lo stato di sollecitazione tridimensionale è caratterizzato da un tensore a 6 componenti indipendenti, o da almeno tre tensioni principali.

Per valutare il grado di pericolosità di uno stato di tensione tridimensionale è necessario fare delle ipotesi sui meccanismi di cedimento.

In particolare si deve individuare una grandezza, calcolabile sia nello stato di tensione uniassiale sia in quello triassiale, che comporti lo stesso grado di pericolo nei due casi.

In pratica il modulo della grandezza scelta nel momento in cui si ha cedimento (snervamento o rottura) del componente soggetto ad uno stato di tensione tridimensionale deve avere lo stesso valore raggiunto per il cedimento nella prova di trazione.

Normalmente la verifica viene fatta considerando come cedimento del componente la condizione di snervamento.

Si definisce quindi una tensione ideale σ_{id} che è possibile calcolare in base allo stato di tensione tridimensionale che equivale alla tensione nella prova di trazione.

Fra le varie ipotesi di cedimento ricordiamo le tre più utilizzate:

Ipotesi della tensione normale massima.

Si ipotizza che la rottura avvenga quanto la tensione principale massima raggiunga il carico unitario di snervamento (o di rottura) nella prova di trazione:

$$\sigma_{id} = \text{Max} \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \}$$

Questa ipotesi si è dimostrata valida per i materiali fragili, ma non adatta ai materiali duttili.

Ipotesi di Tresca o della tensione tangenziale massima.

Partendo dall'osservazione che le superfici di frattura dei provini in materiale duttile risultano inclinate di circa 45° (piano su cui agisce la tensione tangenziale massima) si ipotizza che il cedimento avvenga quando si raggiunge una tensione tangenziale limite. La tensione tangenziale massima è pari al raggio del cerchio di Mohr più grande: per lo stato multiassiale :

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

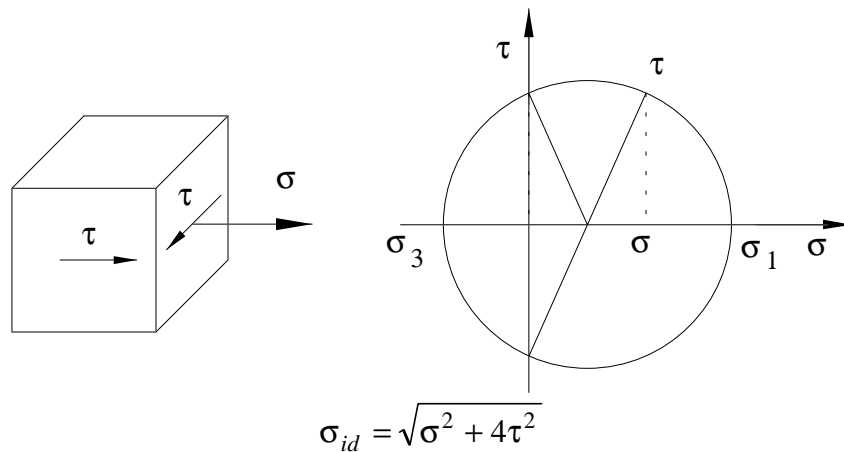
mentre per la prova di trazione:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{eq}}{2}$$

L'uguaglianza delle due permette di ricavare la σ ideale:

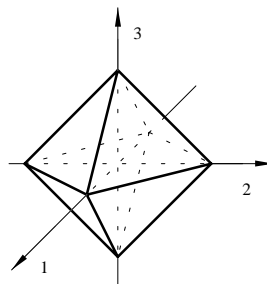
$$\sigma_{id} = |\sigma_1 - \sigma_3|$$

Nel caso particolare del punto di progetto di un albero in cui agiscono solo una tensione normale e una tensione tangenziale la tensione ideale (pari al diametro del cerchio di Mohr più grande) risulta:



Ipotesi di von Mises (detta anche della τ ottaedrica o dell'energia di distorsione)

La tensione ideale di von Mises può essere calcolata con ipotesi di cedimento diverse. Una ipotesi prende in considerazione la tensione tangenziale agente sui piani ottaedrici, cioè i piani che formano angoli uguali rispetto ai tre assi di un sistema di riferimento principale:





Su tali piani agiscono tensioni normali tutte uguali fra loro (e pari ad un terzo del primo invariante) e uguali tensioni tangenziali.

Con lunghi calcoli che qui vengono omessi la tensione ideale secondo questa ipotesi risulta:

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

Alla stessa formula si arriva partendo da considerazioni diverse, ad esempio considerando l'energia di distorsione, cioè l'energia elastica totale depurata dall'energia che tende semplicemente a far variare di volume l'elemento.

Non viene considerata l'intera energia perché sperimentalmente si nota che uno stato di tensione idrostatico (tre tensioni principali uguali fra loro, con conseguenti deformazioni simmetriche) non porta mai a rottura, anche con tensioni molto elevate.

Nel caso particolare del punto di progetto di un albero in cui agiscono solo una tensione normale e una tensione tangenziale la tensione ideale di von Mises risulta:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Sia l'ipotesi di von Mises sia quella di Tresca sono utilizzate comunemente. L'ipotesi di Tresca è più conservativa, quella di von Mises è più aderente ai dati sperimentali. L'ipotesi di von Mises è valida solo nel campo lineare elastico.

Coefficienti di sicurezza

Il coefficiente di sicurezza viene definito come rapporto fra la tensione limite ammissibile e la tensione ideale applicata.

Si può avere un coefficiente di sicurezza contro lo snervamento e uno contro la rottura duttile.

Snervamento:

$$CS = \frac{R_{p0.2}}{\sigma_{id}} \quad \left(= \frac{R_{eH}}{\sigma_{id}} \right)$$

moltiplicando tutti i carichi applicati alla struttura per il coefficiente di sicurezza si perviene allo snervamento dei punti più sollecitati.

Rottura:

$$CS = \frac{R_m}{\sigma_{id}}$$

in questo caso il coefficiente di sicurezza ha un significato convenzionale, in quanto le tensioni ideali vengono calcolate nell'ipotesi di tensioni e deformazioni in campo lineare elastico.



Esercizio 1-1

Dato lo stato di tensione in un punto di un componente in Fe430 $\sigma_{xx} = 120$ MPa,

$\sigma_{yy} = 20$ MPa, $\tau_{xy} = 100$ MPa, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ MPa e $\sigma_{zz} = 30$ MPa:

1. tracciare i cerchi di Mohr e determinare le tensioni principali;
2. calcolare la tensione ideale secondo le tre ipotesi indicate;
3. calcolare il coefficiente di sicurezza in quel punto adottando una opportuna ipotesi di cedimento
4. calcolare le deformazioni nel sistema di riferimento originario e le deformazioni principali.